

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАДАННОЙ ОСВЕЩЕННОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2008 г. А. А. Белоусов; Л. Л. Досколович, доктор физ.-мат. наук; С. И. Харитонов, канд. физ.-мат. наук

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

E-mail: adark@narod.ru

Рассмотрен расчет преломляющих оптических элементов для формирования заданного распределения освещенности на криволинейной поверхности при компактном источнике света. Расчет основан на представлении поверхности элемента через распределение эйконала светового поля в прилегающей плоскости. Эйконал определяется в виде полинома. Расчет преломляющей поверхности основан на градиентной минимизации функционала ошибки, представляющего разницу расчетной и заданной освещенностей полей. Для градиента функционала ошибки получено аналитическое выражение. Проведен расчет преломляющих элементов для формирования прямоугольного распределения освещенности на плоской и цилиндрической поверхностях.

Коды OCIS: 080.2740.

Поступила в редакцию 26.04.2007.

Введение

Расчет оптического элемента для формирования заданного распределения освещенности на криволинейной поверхности является актуальной для большого числа задач, включающих расчет лазерных систем фокусировки, сканирования и навигации, светотехнических устройств, систем освещения и т. д.

С математической точки зрения расчет преломляющего элемента является обратной задачей и состоит в расчете формы поверхности из условия формирования заданного распределения освещенности на некоторой поверхности. В общем случае задача формирования заданного распределения освещенности при точечном (компактном) источнике света сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения типа уравнения Монжа–Ампера и является крайне сложной.

Ряд методов решения задач данного класса в приближении геометрической оптики разработан для дифракционных оптических элементов [1–7]. В этом случае задача ставится как задача расчета эйконала светового поля в плоскости из условия формирования заданной интенсивности поля в некоторой области пространства. Задача расчета эйконала в плоскости отлична от задачи расчета преломляющей поверхности. Кроме того, восстановление формы поверхности рельефа дифракционного элемента по функции эйконала основано на использовании параксиального приближения и приближения тонкого оптического элемента. Такие приближения недопустимы при расчете преломляющих по-

верхностей, формирующих области с достаточно большим угловым размером ($> 10^\circ$).

Ряд методов расчета оптических элементов разработан в светотехнике [8–11]. Методы светотехники позволяют учесть размеры и форму источника света, однако аналитические решения и эффективные алгоритмы расчета известны только для задач с радиальной или цилиндрической симметрией. В последние годы появились публикации по расчету оптических поверхностей итерационными методами при компактных источниках света [12, 13]. Указанные методы позволяют сформировать сложные распределения освещенности, например, в виде алфавитно-цифровых символов, однако обладают низкой эффективностью.

В статье рассмотрен градиентный метод расчета преломляющих оптических элементов для фокусировки на заданную криволинейную поверхность при точечном источнике света. Метод не использует приближенных соотношений типа приближения тонкого оптического элемента и позволяет реализовать фокусировку с фактически 100%-ной эффективностью в области, не обладающей радиальной симметрией. Метод основан на представлении поверхности элемента через распределение эйконала светового поля в прилегающей плоскости. Эйконал определяется в виде полинома. Расчет преломляющего элемента основан на градиентной минимизации функционала ошибки, представляющего разницу расчетной и заданной освещенностей, по коэффициентам полинома эйконала, определяющего элемент.

Постановка задачи расчета оптической поверхности

Требуется рассчитать преломляющую поверхность \mathbf{M} из условия фокусировки излучения от точечного источника $\mathbf{O} = (O_x, O_y, O_z)$ в область D , расположенную на поверхности $z = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x, y)$ – локальные декартовы координаты (рис. 1). При этом в области D должно быть сформировано заданное распределение освещенности $E(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$. Поверхность $z = f(\mathbf{x})$ и область D будем называть поверхностью фокусировки и областью фокусировки соответственно.

Поверхность \mathbf{M} определим через распределение эйконала светового поля $\psi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$ в некоторой плоскости, где $\mathbf{u} = (u, v)$ – декартовы координаты в этой плоскости. Без потери общности будем считать, что эйконал задан в плоскости $z = 0$ (рис. 1). Представление поверхности через распределение эйконала в плоскости авторы считают удобным, поскольку оно позволяет использовать аналитические и итерационные методы расчета эйконала, разработанные для дифракционных оптических элементов [1–7].

Поверхность $\mathbf{M}(\mathbf{u}) = (x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}))$ однозначно определяется через распределение эйконала $\psi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$. Действительно, проведем расчет преломляющей поверхности по распределению эйконала $\psi(\mathbf{u})$ (рис. 1). Запишем уравнение преломляющей поверхности в виде

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u})l(\mathbf{u}), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = (u, v, 0)$ – вектор точки в плоскости задания эйконала, $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ – вектор направления луча, который определяется эйконалом $\psi(\mathbf{u})$, $l(\mathbf{u})$ – расстояние от точки $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ до преломляющей поверхности по направлению $\mathbf{p}(\mathbf{u})$. Вектор луча $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ имеет вид [14]:

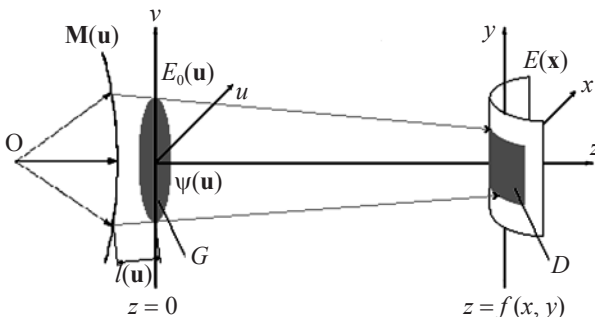


Рис. 1. Геометрия задачи расчета преломляющего оптического элемента, формирующего заданное распределение освещенности на криволинейной поверхности.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{u}) &= (p_x(\mathbf{u}), p_y(\mathbf{u}), p_z(\mathbf{u})) = \\ &= \left(\nabla \psi(\mathbf{u}), \sqrt{1 - (\nabla \psi(\mathbf{u}))^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\nabla \psi(\mathbf{u}) = (\partial \psi(\mathbf{u}) / \partial u, \partial \psi(\mathbf{u}) / \partial v)$. Функция $l(\mathbf{u})$ в (1) определяется из уравнения

$$\psi(\mathbf{u}) = l(\mathbf{u}) + n |\mathbf{OM}(\mathbf{u})|, \quad (3)$$

где n – показатель преломления материала оптического элемента, $|\mathbf{OM}(\mathbf{u})| = |\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u})l(\mathbf{u}) - \mathbf{O}|$ – расстояние от источника излучения до точки преломляющей поверхности. Уравнение (3) определяет условие равенства оптических длин лучей, прошедших через преломляющую поверхность, заданному эйконалу $\psi(\mathbf{u})$. Расчет функции $l(\mathbf{u})$ из (3) сводится к решению квадратного уравнения

$$\begin{aligned} (n^2 - 1)l(\mathbf{u}) + 2l(\mathbf{u})(\psi(\mathbf{u}) - n^2(\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{O}, \mathbf{p}(\mathbf{u}))) + \\ + n^2|\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{O}|^2 - \psi^2(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Расчет освещенности на поверхности фокусировки

Рассмотрим расчет освещенности на поверхности фокусировки $z = f(x, y)$. Обозначим $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}))$ координаты пересечения лучей с поверхностью фокусировки. Согласно (2) получим

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}(\mathbf{u})h(\mathbf{u}), \quad (5)$$

где $h(\mathbf{u})$ – длина преломленного луча от оптического элемента до поверхности фокусировки. Функция $h(\mathbf{u})$ в (5) определяется из уравнения $z(\mathbf{u}) = f(x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}))$, получаемого при подстановке $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ в уравнение поверхности фокусировки.

Освещенность на поверхности фокусировки определяется из закона сохранения светового потока в виде

$$E(\mathbf{x}) = E_0(\mathbf{u}) / \left(\sqrt{1 + (\nabla f(\mathbf{x}))^2} |J(\mathbf{u})| \right), \quad (6)$$

где $E_0(\mathbf{u})$ – освещенность, созданная поверхностью $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ в плоскости задания эйконала, $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f(\mathbf{x}) / \partial x, \partial f(\mathbf{x}) / \partial y)$, а

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &= (\partial x(\mathbf{u}) / \partial u)(\partial y(\mathbf{u}) / \partial v) - \\ &- (\partial y(\mathbf{u}) / \partial u)(\partial x(\mathbf{u}) / \partial v) \end{aligned} \quad (7)$$

– якобиан преобразования координат (5). Освещенность $E_0(\mathbf{u})$ также определяется из закона сохранения светового потока в виде

$$E_0(\mathbf{u}) = I(\mathbf{u}) |\mathbf{N}(\mathbf{u})| \cos \alpha / |\mathbf{OM}(\mathbf{u})|^2, \quad (8)$$

где $I(\mathbf{u})$ – интенсивность точечного источника излучения, $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{M}(\mathbf{u}) / \partial u \times \partial \mathbf{M}(\mathbf{u}) / \partial v$ – вектор нормали к оптической поверхности, $\cos \alpha = (\mathbf{OM}(\mathbf{u}) / |\mathbf{OM}(\mathbf{u})|)$,

$\mathbf{N}(\mathbf{u})/|\mathbf{N}(\mathbf{u})|$). Компоненты вектора нормали $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ в (8) могут быть найдены из (1) путем прямого дифференцирования.

Представление освещенности в виде формулы (6) неудобно для расчета, поскольку его нельзя использовать в области каустик и в случае, когда несколько лучей из плоскости задания эйконала приходят в одну точку области фокусировки. Для нахождения удобной расчетной формулы для освещенности $E(\mathbf{x})$ воспользуемся интегральным представлением формулы (6)

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f(\mathbf{x}))^2}} \iint_G \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (9)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция. Аппроксимируем дельта-функцию в (9) некоторой иглообразной функцией $\delta_\sigma(\mathbf{x})$ ($\lim_{\sigma \rightarrow 0} \delta_\sigma(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$) и представим распределение освещенности в виде

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f(\mathbf{x}))^2}} \iint_G \delta_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (10)$$

Выражение (10) ориентировано на расчет освещенности с использованием метода трассировки лучей. В этом случае формула (10) дает усредненное значение освещенности в окрестности, определяемой “эффективной” шириной функции $\delta_\sigma(\mathbf{x})$. Величина этой окрестности обычно определяется шагом дискретизации в области наблюдения. В качестве функции $\delta_\sigma(\mathbf{x})$ может, например, использоваться гауссова функция

$$\delta_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp(-\mathbf{x}^2/\sigma^2). \quad (11)$$

В этом случае освещенность (10) будет усредненным значением освещенности (9) с гауссовым весом (11).

Расчет оптической поверхности для фокусировки в заданную область

Для расчета преломляющей поверхности $\mathbf{M}(\mathbf{u})$, формирующей заданное распределение освещенности, был использован градиентный метод минимизации функционала ошибки $\varepsilon(\psi)$, представляющего различие расчетного и требуемого распределений освещенности на поверхности фокусировки.

При этом поверхность элемента и распределение освещенности считаются представленными через эйконал поля в плоскости $z = 0$ согласно формулам (1), (2), (4), (8)–(10). Такое представление является удобным. Использование аналитических и

численных методов расчета эйконала поля, разработанных для расчета дифракционных оптических элементов, позволяет выбрать начальное приближение для градиентного метода. В качестве такого приближения можно, например, использовать результат решения задачи расчета эйконала для формирования такого же распределения освещенности.

Рассмотрим использованный градиентный метод. Определим эйконал в виде полинома

$$\psi(u, v) = \sum_{ij} c_{ij} u^i v^j. \quad (12)$$

Полиномиальное представление эйконала было использовано в работах [15, 16] и показало хорошие результаты при расчете эйконала из условия фокусировки в заданные области. В этом случае задача минимизации функционала ошибки $\varepsilon(\psi)$ сводится к задаче минимизации функции многих переменных от коэффициентов c_{ij} . В качестве функции невязки была использована квадратичная функция

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = \iint_D (E(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - E_D(\mathbf{x}))^2 dx dy, \quad (13)$$

где вектор \mathbf{c} обозначает набор коэффициентов полинома, а $E(\mathbf{x}, \mathbf{c})$, $E_D(\mathbf{x})$ – расчетное и требуемое распределение освещенности в области фокусировки. В этом случае градиентный расчет функции преломляющей поверхности состоит в итерационной коррекции вектора коэффициентов \mathbf{c} по правилу

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n-1} - t \nabla \varepsilon(\mathbf{c}_{n-1}), \quad (14)$$

где $\nabla \varepsilon(\mathbf{c})$ – градиент функции невязки, t – шаг метода. Компоненты вектора градиента в (14) несложно получить в виде

$$\partial \varepsilon(\mathbf{c}) / \partial c_{ij} = 2 \iint_D (E(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - E_D(\mathbf{x})) \Psi_{ij}(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}(\mathbf{x}) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla f(\mathbf{x}))^2}} \iint_G \frac{\partial}{\partial c_{ij}} (E_0(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \delta_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{c}))) d^2 \mathbf{u}, \end{aligned}$$

где $E_0(\mathbf{u}, \mathbf{c})$ – освещенность (8) в плоскости задания эйконала, $\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{c})$ – координаты лучей (5) на поверхности фокусировки.

Расчет вектора градиента также может осуществляться численно с использованием разностных формул для расчета производных $\partial \varepsilon / \partial c_{ij}$. В работе для минимизации функции ошибки (13) и реализации градиентного метода (14) были использованы java-класс `Uncmin_f77` и java-интерфейс `Uncmin_methods` из пакета оптимизации “AN UNCONSTRAINED NONLINEAR OPTIMIZATION SOLVER”.

Результаты расчета

Для характеристики качества решений, получаемых в результате работы итерационного алгоритма, введем значения энергетической эффективности e и среднеквадратичной ошибки δ . Значение

$$e = \int_D E(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} / \int_G E_0(\mathbf{u}) d^2\mathbf{u} \quad (16)$$

характеризует долю энергии, фокусируемую в требуемой области D .

Значение

$$\delta = (1/\bar{E}) \sqrt{(1/||D||) \int_D (E(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - E_D(\mathbf{x}))^2 d^2\mathbf{x}}, \quad (17)$$

где $||D||$ – площадь области фокусировки D , а \bar{E} – среднее значение, характеризует ошибку формирования заданного распределения освещенности $E(\mathbf{x})$.

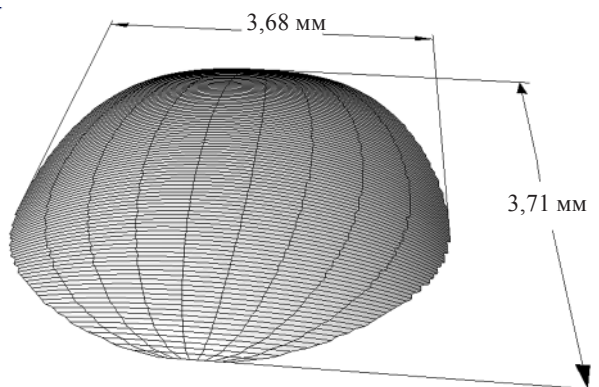


Рис. 2. Преломляющая поверхность для фокусировки в прямоугольную область с размерами 70×50 мм на плоской поверхности $z = 115$ мм.

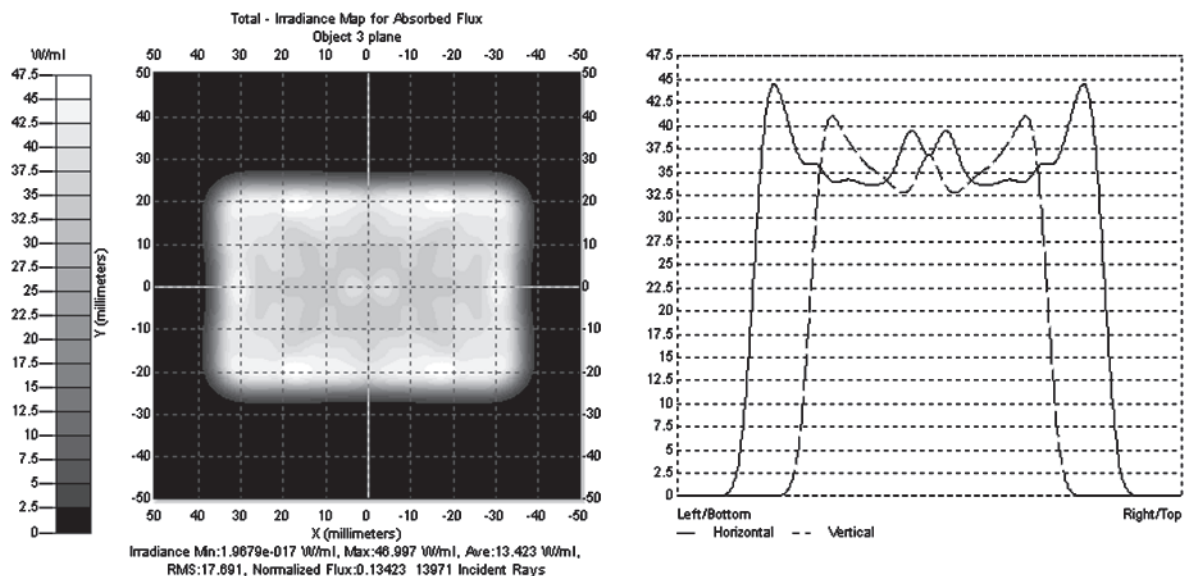


Рис. 3. Рассчитанная в TracePro освещенность на плоской поверхности $z = 115$ мм, формируемая преломляющим элементом (рис. 2).

Частным случаем задачи формирования заданного распределения освещенности на криволинейной поверхности является задача расчета преломляющей поверхности для формирования заданной освещенности в плоскости. На рис. 2 представлена поверхность оптического элемента ($n = 1,5$), рассчитанного градиентным методом (13)–(15) из условия формирования постоянной освещенности в прямоугольнике 70×50 мм, расположенном в плоскости $z = 115$ мм. В данном случае эйконал, представляющий поверхность, задавался в виде симметричного полинома 6-й степени в круге с радиусом 2,5 мм. Источник, излучающий по закону Ламберта, находился в точке $O = (0, 0, -5)$ мм. Вершина преломляющей поверхности (рис. 2) касается плоскости задания эйконала $z = 0$ в точке $(0, 0, 0)$. Симметричный полином 6-й степени имеет 9 коэффициентов для оптимизации. Время расчета эйконала с указанным числом параметров на компьютере Pentium 4 составляет порядка 15 мин. Для такой поверхности (рис. 2) энергетическая эффективность фокусировки составляет фактически 100% при среднеквадратичной ошибке $\delta = 5,9\%$. Для проверки правильности разработанных алгоритмов и программ был проведен расчет освещенности от рассчитанного оптического элемента средствами специализированной программы по светотехнике TracePro [17]. Результаты расчета при числе лучей 100 000 приведены на рис. 3. Распределение освещенности на рис. 3 соответствует требуемому распределению и подтверждает правильность разработанных программ.

На рис. 4 представлена преломляющая поверхность ($n = 1,5$), рассчитанная для фокусировки в пря-

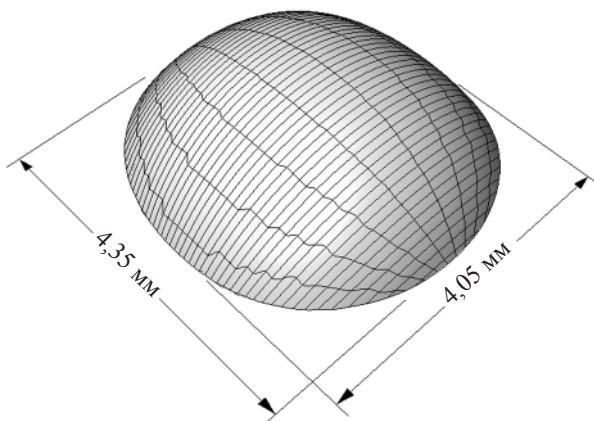


Рис. 4. Преломляющая поверхность для фокусировки в прямоугольную область на цилиндрической поверхности с радиусом 35 мм на расстоянии $z = 100$ мм.

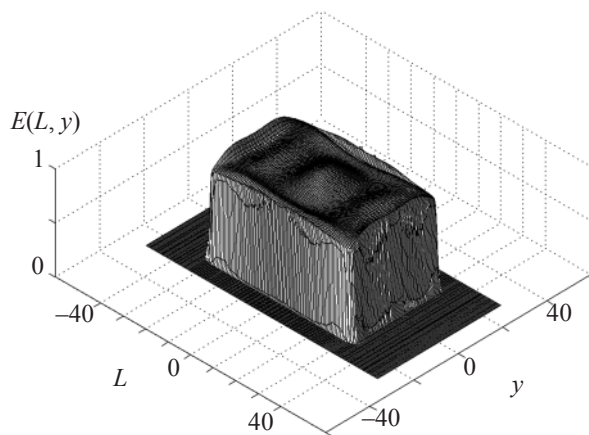


Рис. 5. Рассчитанная освещенность на цилиндрической поверхности с радиусом 35 мм на расстоянии $z = 100$ мм от преломляющей поверхности (рис. 4).

моугольник 55×40 мм, расположенный на цилиндрической поверхности с радиусом 35 мм. Ось цилиндрической поверхности совпадает с осью Oy и расположена в плоскости $z = 100$ мм. В данном примере эйконал, представляющий поверхность, задавался в виде симметричного полинома 8-й степени в круговой области с радиусом 2,5 мм. Ламбертовский источник находился в точке $O = (0, 0, -5)$ мм. Вершина преломляющей поверхности (рис. 4) касается плоскости задания эйконала в точке $(0, 0, 0)$. Полином 8-й степени имеет 14 коэффициентов для оптимизации. Время расчета эйконала с указанным числом параметров на компьютере Pentium 4 составило порядка 40 мин. Для такой поверхности (рис. 4) энергетическая эффективность фокусировки составляет фактически 100% при среднеквадратичной ошибке $\delta = 10,2\%$.

Моделирование рассчитанной поверхности средствами программы TracePro не представляется возможным, так как TracePro не позволяет получать распределения освещенности непосредственно на криволинейных поверхностях. На рис. 5 представлено расчетное распределение освещенности на цилиндрической поверхности в координатах (L, y) , где $L = \alpha R$, α – угол между осью Oz и точкой на поверхности цилиндра с координатами (x, y) , а R – радиус цилиндрической поверхности.

Приведенные примеры показывают эффективность разработанного градиентного алгоритма при расчете преломляющих оптических элементов для формирования заданных распределений освещенности.

Заключение

Рассмотренный градиентный метод расчета преломляющего оптического элемента, основанный на представлении поверхности через эйконал, дает высокое качество фокусировки. Для расчета преломляющих поверхностей, формирующих равномерные прямоугольные распределения освещенности на плоскости и цилиндрической поверхности, достаточно представить поверхности через эйконалы в виде полиномов шестой и восьмой степеней соответственно. Полученные полиномы обеспечивают среднеквадратичную ошибку 5–10% при фактически 100%-ной энергетической эффективности. Предложенный метод можно использовать для расчета отражающих оптических элементов. При расчете отражающих элементов изменится только уравнение (4), описывающее восстановление поверхности по эйконалу в плоскости. Метод также может быть модифицирован на случай расчета оптических элементов при размерном источнике излучения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 07-07-97601-р_офи, 07-01-96602-р_поволжье_a, 07-07-91580-АСП_a; гранта CRDF Project RUXO-014-SA-06.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков А.В., Головашкин Д.Л., Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Котляр В.В., Павельев В.С., Скиданов Р.В., Соيفер В.А., Соловьев В.С., Успенев Г.В., Харитонов С.И., Хонина С.Н. Методы компьютерной

- оптики / Под ред. Соифера В.А. М.: Физматлит, 2003. 688 с.
2. *Soifer V.A., Doskolovich L.L., Golovashkin D.L., Kharitonov S.I., Khonina S.N., Kotlyar V.V., Paveliev V.S., Skidanov R.V., Soloviev V.S., Volkov A.V., Uspleniev G.V.* Methods For Computer Design of Diffractive Optical Elements / Ed. by Soifer V.A. Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc., 2002. 765 p.
 3. *Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян Е.В., Сисакян И.Н., Соифер В.А.* Оптические элементы, фокусирующие когерентное излучение в произвольную фокальную линию // Препринт № 69 ФИАН СССР. М.: ФИАН СССР, 1983. 41 с.
 4. *Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Соифер В.А., Степанов В.В.* Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 3. С. 605–608.
 5. *Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Соифер В.А.* Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. № 13. С. 810–815.
 6. *Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В.* Введение в компьютерную оптику. М.: Изд-во МГУ, 1991. 309 с.
 7. *Данилов В.А., Кинбер Б.Е., Шилов А.Е.* Теория когерентных фокусаторов // Компьютерная оптика. М.: МЦНТИ, 1987. В. 1. С. 40–52.
 8. *Elmer W.B.* The Optical Design of Reflectors / 2nd Edition. New York: Wiley, 1985.
 9. *Feuermann D., Gordon J.M., Ries H.* Nonimaging optical designs for maximum power density remote irradiation // Appl. Opt. 1998. V. 37. P. 1835–1844.
 10. *Feuermann D., Gordon J.M.* Optical performance of axisymmetric edge-ray concentrators and illuminators // Appl. Opt. 1998. V. 37. P. 1905–1912.
 11. *Gordon J.M., Rabl A.* Reflectors for uniform far-field irradiance: fundamental limits and example of an axisymmetric solution // Appl. Opt. 1998. V. 37. P. 44–47.
 12. *Ries H., Muschaweck J.* Tailored freeform optical surfaces // JOSA. A. 2002. V. 19. P. 590–595.
 13. *Hicks R.A.* Designing a mirror to realize a given projection // JOSA. A. 2005. V. 22. P. 323–330.
 14. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970.
 15. *Белоусов А.А., Досколович Л.Л., Харитонов С.И.* Градиентный метод расчета эйконала для фокусировки в заданную область // Автотметрия. 2007. V. 43. № 3.
 16. *Dresel Th., Beyerlein M., Schwider J.* Design of computer-generated beam-shaping holograms by iterative finite-element mesh adaption // Appl. Opt. 1996. V. 35. P. 6865–6874.
 17. <http://www.lambdaires.com/products/tracepro/index.phtml>