РАСЧЕТ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ПРОИЗВОДСТВО ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 535.2

ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ “НЕИЗОБРАЖАЮЩЕЙ” ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОСВЕТИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

А. В. Гапеева; **В. А. Зверев**, доктор техн. наук;
И. Н. Тимощук, канд. техн. наук

НИУ ИТМО, Санкт-Петербург

E-mail: post_vaz@rambler.ru

Показано, что если (подобно функции рассеяния точки в изображающей оптике) принять относительное распределение яркости в источнике излучения конечных размеров в качестве функции неизображаемого отображения, то реальное распределение освещенности поверхности определится интегралом свертки функции неизображаемого отображения с распределением освещенности поверхности точечным источником. Рассмотрено применение отражающей поверхности для выравнивания освещенности поверхности безотносительно к ее изображающим свойствам.

Ключевые слова: *источник излучения, центральная проекция, освещённость, отражающая поверхность.*

Коды OCIS: 220.0220, 220.4298, 220.2945.

Поступила в редакцию 11.07.2013.

Пусть точечный источник излучения S освещает отверстие произвольной формы в плоском экране, расположенном на расстоянии R_0 от источника, как показано на рис.1. При этом конфигурация центральной проекции отверстия на плоской поверхности, расположенной на расстоянии R от центра проекции в точке S, будет подобна конфигурации отверстия в экране.

Световой поток, излучаемый площадкой dS в телесный угол $d\omega$ в направлении, определяемом полярными углами (α, β), равен [1]

$$d^2\Phi = L d\omega dS \cos\varepsilon, \qquad (1)$$

где L – фотометрическая яркость излучения площадки dS в точке (ξ, η) в направлении (α, β); в общем случае $L = L(\xi, \eta; \alpha, \beta)$; ε – угол между направлением (α, β) и нормалью к элементу поверхности, как показано на рис. 2. Множитель $\cos\varepsilon$ в выражении (1) определяет тот факт, что физический смысл имеет не сам элемент поверхности dS, а его проекция на плоскость, перпендикулярную к направлению (α, β).

Пусть сечение телесного угла $d\omega$ наклонной плоскостью образует площадку dS_ν на некотором расстоянии R от площадки dS вдоль оси телесного угла $d\omega$, нормаль к которой образует угол ε_ν, как показано на рис. 3 [2]. При этом

$$d^2\Phi = L d\omega dS \cos\varepsilon = L\,\frac{dS_\nu \cos\varepsilon_\nu}{R^2}\,dS\cos\varepsilon = L d\omega_\nu dS_\nu \cos\varepsilon_\nu. \qquad (2)$$

В то же время световой поток, проходящий через площадку dS_ν, равен

$$d^2\Phi_\nu = L_\nu d\omega_\nu dS_\nu \cos\varepsilon_\nu. \qquad (3)$$

В общем случае $d^2\Phi_\nu = \tau d^2\Phi$,
где τ – коэффициент пропускания среды, разделяющей площадки dS и dS_ν.

Из сопоставления выражений следует, что при $\tau = 1$ имеем $L = L_\nu$. Полученное равенство позволяет интерпретировать величину L не только как яркость излучающей поверхности,

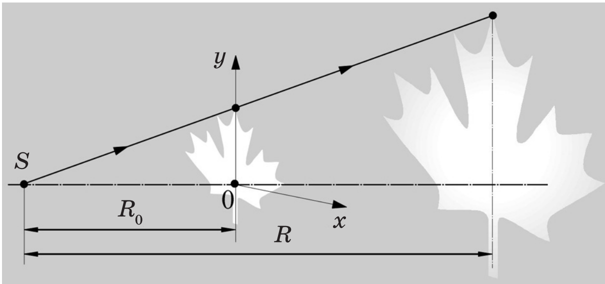

Рис. 1. Отображение отверстия в экране на освещаемой поверхности

но и как яркость излучения в плоском сечении светового пучка.

Совокупность геометрических лучей, проходящих через две произвольно расположенные площадки (диафрагмы), размеры которых значительно меньше расстояния между ними, называют физическим пучком, при этом поверхность, ограничивающую поперечные размеры физического пучка, принято называть световой трубкой.

Из формулы (2) следует, что освещенность площадки dS_ν, на которую падает световой поток $d^2\Phi$, равна

$$E = \frac{d^2\Phi}{dS_\nu} = L\,\frac{dS}{R^2}\cos\varepsilon_\nu\cos\varepsilon.$$

При $\varepsilon = \varepsilon_\nu = 0$ и $R = R_0$ получаем

$$E_0 = LdS/R_0^2. \tag{4}$$

При $\varepsilon = \varepsilon_\nu$ и $R = R_0/\cos\varepsilon$ освещенность площадки dS_ν равна

$$E = L(dS/R_0^2)\cos^4\varepsilon. \tag{5}$$

Из сопоставления выражений (4) и (5) находим, что

$$E = E_0\cos^4\varepsilon. \tag{6}$$

При неравномерной яркости излучения элементарной площадки излучающей поверхности световой поток, излучаемый всей поверхностью, равен

$$\delta\Phi = \pi\sin^2\sigma\iint_{\xi\eta} L(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{7}$$

где σ – апертурный (плоский) угол телесного угла излучения; ξ, η – система декартовых координат в плоскости излучающей поверхности; $d\xi d\eta = dS$ – элементарная площадка излучающей поверхности.

Пусть $\delta\Phi = \pi(\sin^2\sigma)L_0\delta S$, где L_0 – среднее значение яркости излучения поверхности δS. Тогда

$$L_0\delta S = \iint_{\xi\eta} L(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

При этом

$$\iint_{\xi\eta}\frac{L(\xi,\eta)}{L_0\delta S}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = 1.$$

Следовательно, величина $D(\xi,\eta) = L(\xi,\eta)/(L_0\delta S)$ подобна функции рассеяния точки (ФРТ) в изображающей оптике и может быть названа функцией неизображающего отображения (ФНО) в неизображающей оптике.

Плоскость отверстия в экране и освещаемую поверхность естественно считать параллельными излучающей поверхности. При этом центральные проекции излучающей поверхности на освещаемую поверхность при произвольном

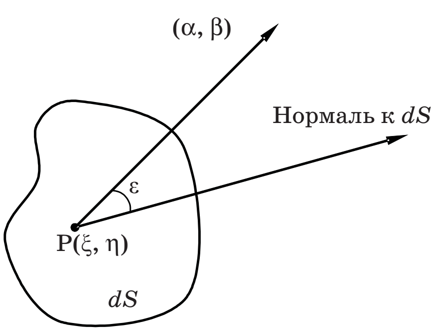

Рис. 2. Световой поток, излучаемый площадкой dS.

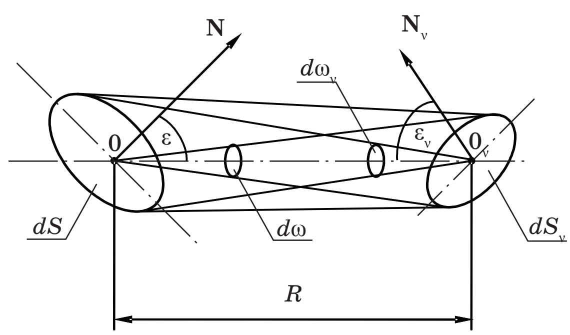

Рис. 3. Геометрические соотношения в световой трубке.

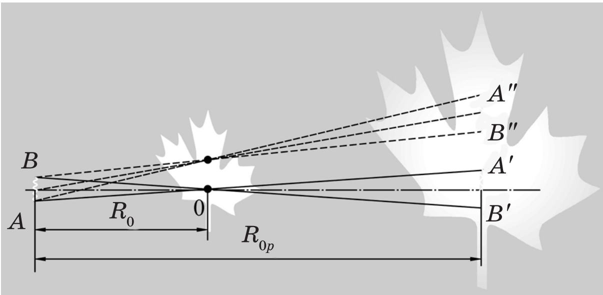

Рис. 4. Отображение отверстия в экране на поверхности, освещаемой источником излучения конечных размеров.

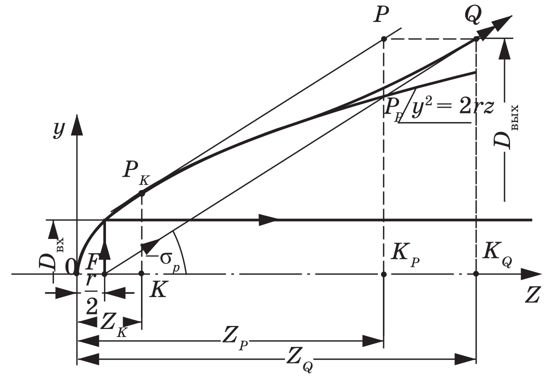

Рис. 5. Форма отражающей поверхности для выравнивания освещенности освещаемой поверхности.

расположении центров проекции в пределах отверстия в экране, как показано на рис. 4, одинаковы и по форме, и по размерам, т.е. ФНО подобна ФРТ при соблюдении условия изопланатичности изображения.

Пусть расстояние от источника излучения до отверстия в экране равно R_0, а расстояние до освещаемой поверхности – R_{0p}. Освещенность отверстия определяется формулой (5), а освещаемой поверхности – формулой вида

$$E_p = E_{0p}\cos^4\varepsilon, \qquad (8)$$

где $E_{0p} = L(\xi_p,\eta_p)\delta S/R_{0p}^2$; $\delta S = \iint d\xi d\eta$.

В этом выражении $\cos^4\varepsilon = R_{0p}^4/(R_{0p}^2 + x_p^2 + y_p^2)^2$.

В рассматриваемом случае ФНО определяется выражением

$$D(\xi_p,\eta_p) = L(\xi_p,\eta_p)/(L_0\delta S_p). \qquad (9)$$

При этом реальное распределение освещенности на освещаемой поверхности определяется интегралом свертки

$$\widetilde{E}_p(x_p, y_p) = \iint\limits_{\infty} D(\xi_p,\eta_p)E_p(x_p - \xi_p, y_p - \eta_p)d\xi_p d\eta_p. \qquad (10)$$

В соответствии с теоремой свертки преобразование Фурье распределения освещенности, определяемого формулой (10), равно произведению преобразований Фурье ФНО $D(\xi_p, \eta_p)$ и распределения освещенности $E_p(x_p, y_p)$ –

$$\widetilde{e}_p(N_x, N_y) = d(N_x, N_y)e_p(N_x, N_y). \qquad (11)$$

При $L(\xi, \eta) = L_0 = \text{const}$ справедливы следующие соотношения: $E_{0p} = L_0(\delta S/R_p^2)$; $D(\xi_p,\eta_p)=1/\delta S_p$.

Пусть $\widetilde{E}_p = E_p/E_{0p}$. Тогда при $\varepsilon = 0$ имеем $\widetilde{E}_p = 1$, при $\varepsilon = \pi/2 - \widetilde{E}_p = 0$. При этом возникает вполне очевидная мысль, суть которой сводится к тому, чтобы собрать световой поток, падающий на освещаемую поверхность вне угла $\varepsilon = \varepsilon_{\text{к}}$, и "положить" его на поверхность в пределах угла $0 \le \varepsilon < \varepsilon_{\text{к}}$. Для решения этой задачи применим отражающую поверхность несферической формы, а в качестве исходной формы поверхности рассмотрим отражающую поверхность параболоида вращения, расположенную перед источником излучения (источник расположен в фокальной плоскости параболоида), как показано на рис. 5.

В системе координат $y0z$ уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2rz, \qquad (12)$$

где r – радиус кривизны параболы в осевой точке. При этом $0F = (1/2)r$. Уравнение луча, исходящего из точки F под углом $-\sigma_p$ к оси $0z$, имеет вид

$$y = -(z - (1/2)r)\text{tg}\sigma_p. \qquad (13)$$

Заменив величину y в уравнении (12) выражением (13) и выполнив преобразования, получаем уравнение относительно координаты z точки пересечения луча с параболой

$$z^2 - (1 + 2/\text{tg}^2\sigma_p)rz + (1/4)r^2 = 0. \qquad (14)$$

Решая это уравнение, получаем

$$z_p = 0{,}5\big((1 + \cos\sigma_p)/(1 - \cos\sigma_p)\big)r = r/(2\text{tg}^2(\sigma_p/2)). \qquad (15)$$

Отсюда следует, что при $\sigma_p = 0$ координата $z_p = \infty$, а при $\sigma_p = \pi/2 - z_p = (1/2)r$. Положив в формуле (8) угол $\varepsilon = -\sigma_p$, находим, что $\widetilde{E}_p = \cos^4 \sigma_p$. Выбрав требуемое значение величины $\widetilde{E}_p$, находим косинус угла σ_p.

Угол γ между касательной к параболе и осью Oz определяется выражением

$$\mathrm{tg}\gamma = dy/dz = r/y. \qquad (16)$$

Положив угол $\gamma = -\sigma_p$, находим координату $y_к$ точки $P_к$ касания прямой с параболой. При этом координата

$$z_к = y_к^2/2r = r/(2\mathrm{tg}^2\omega_p). \qquad (17)$$

Освещаемая зона поверхности формируется световым потоком, который излучаеется в пределах телесного угла, определяемого плоским углом $2\sigma_p$. Для того чтобы этот поток, определяемый плоским углом от $2\sigma = 2\sigma_p$ до $2\sigma = \pi$, непрерывно распределялся в пределах освещаемой зоны, касательная к кривой меридионального сечения отражающей поверхности в крайней точке должна располагаться под углом $\gamma = -\sigma_p$ к оси $0z$. Для этого параболу необходимо заменить кривой, определяемой уравнением

$$y^2 = 2rz + a_1z^2 + a_2z^3 + a_3z^4. \qquad (18)$$

При этом тангенс угла γ, образованного касательной к кривой с осью $0z$, равен

$$2y\mathrm{tg}\gamma = 2y(dy/dz) = 2r + 2a_1z + 3a_2z^2 + 4a_3z^3. \qquad (19)$$

Это условие можно выполнить, если крайнюю точку меридионального сечения отражающей поверхности (точку P) сместить вдоль луча вправо, т.е. при $z > z_p$.

Заметим, что касательная в точке $P_к$ параболоида пересекает продолжение линии K_pP_p на рис. 5 в точке P на расстоянии K_pP от оси $0z$. Из рис. 5 находим, что $K_pP = y_p + P_pP$, где $P_pP = y_к + (z_к - 0{,}5r)\mathrm{tg}\sigma_p$. В качестве исходного положения точки Q на луче можно принять точку, расположенную на расстоянии $K_QQ = K_pP$ от оси $0z$. Тогда, обозначив расстояние $K_QQ = y_Q$, получаем

$$y_Q = y_p + y_к + (z_к - 0{,}5r)\mathrm{tg}\sigma_p. \qquad (20)$$

При этом $z_Q = -y_Q/\mathrm{tg}\sigma_p + 0{,}5r$. (21)

Подставив выражение (15) в выражение (13), получим

$$y_p = -r\sin\sigma_p/(1 - \cos\sigma_p). \qquad (22)$$

Из выражения (16) при $\gamma = -\sigma_p$ находим, что координата

$$y_к = -r\mathrm{tg}\sigma_p. \qquad (23)$$

Применив формулу (17), получаем

$$(z_к - 0{,}5r)\mathrm{tg}\sigma_p = r/\mathrm{tg}\sigma_p. \qquad (24)$$

Полученные соотношения (22)–(24) позволяют преобразовать выражения (20) и (21) к виду:

$$y_Q = -r\left(\cos^2\sigma_p + (1 + \cos^2\sigma_p)^2\right)/\sin 2\sigma_p, \qquad (25)$$

$$z_Q = r\left(1 + (1 + \cos\sigma_p)^2\right)/2\sin 2\sigma_p. \qquad (26)$$

Кривую сечения отражающей поверхности определим уравнением (18). Для того чтобы кривая меридионального сечения отражающей поверхности содержала точку Q, а касательная к кривой в этой точке образовывала бы с осью $0z$ угол $\gamma = -\sigma_p$, кривую достаточно определить уравнением вида

$$y_Q^2 = 2rz_Q + a_1z_Q^2 + a_2z_Q^3 + a_3z_Q^4, \qquad (27)$$

Тогда при $\gamma = -\sigma_p$ имеем

$$-2y\mathrm{tg}\sigma_p = 2r + 2a_1z_Q + 3a_2z_Q^2 + 4a_3z_Q^3. \qquad (28)$$

Радиус r при вершине поверхности считаем известным (например, выбранным из конструктивных соображений). Если исходная поверхность имеет форму параболоида вращения, то коэффициент $a_1 = 0$. Однако, учитывая характер решаемой задачи, естественно отказаться от этого условия и ограничиться представлением кривой уравнением вида

$$y_Q^2 = 2rz_Q + a_1z_Q^2 + a_2z_Q^3. \qquad (29)$$

В этом случае $2y\mathrm{tg}\sigma_p = 2r + 2a_1z_Q + 3a_2z_Q^2$. (30)

Координаты y_Q и z_Q в выражениях (29) и (30) определяются формулами (25) и (26).

Пусть, например, $\cos^4\sigma_p = 0{,}5$. Тогда $\cos\sigma_p = 0{,}8409$. Подставив это значение косинуса угла в выражения (25) и (26), получаем такие координаты точки Q: $y_Q = 4{,}5002r$, $z_Q = 7{,}4923r$. При этом выражения (29) и (30) принимают вид системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}0{,}09383 &= a_1 + 7{,}4923a_2r\\ 0{,}25310 &= a_1 + 11{,}2384a_2r\end{aligned}\right\}. \qquad (31)$$

Решив эту систему уравнений, получаем $a_1 = -0{,}2247$; $ra_2 = 0{,}04252$. При этих значениях коэффициентов уравнение кривой сечения отражающей поверхности принимает вид

$$y^2 = 2rz - 0{,}2247z^2 + 0{,}04252z^3/r.$$

Итак, при освещении поверхности источником излучения малых размеров ("точечным" источником) освещенность поверхности изменяется пропорционально четвертой степени косинуса угла падения излучения на поверхность. Если (подобно функции рассеяния точки в изображающей оптике) относительное распределение яркости в источнике излучения конечных размеров принять в качестве функции неизображаемого отображения, то реальное распределение освещенности поверхности определится интегралом свертки функции неизображаемого отображения с распределением освещенности поверхности точечным источником.

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов В.П., Батраков А.С.* Трехмерная компьютерная графика / Под ред. Г.М. Полищука. М.: Радио и связь, 1995. 224 с.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
3. *Зверев В.А., Точилина Т.В.* Основы оптотехники. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. 293 с.