РАСЧЕТ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ПРОИЗВОДСТВО ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 535.314

ВЕКТОРНЫЙ И МАТРИЧНЫЙ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ЛУЧА, ПРЕЛОМЛЕННОГО СИСТЕМОЙ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ПЛОСКИХ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2014 г. **К. В. Ежова**, канд. техн. наук; **В. А. Зверев**, доктор техн. наук; **И. А. Трусов**

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: post_vaz@rambler.ru

На основе закона преломления в векторной форме получено выражение, определяющее направление луча, преломленного на двух преломляющих поверхностях. В результате анализа полученного выражения, представленного в матричной форме, предложен вид выражения, определяющего направление луча, преломленного произвольным числом преломляющих поверхностей. Путем применения метода полной (математической) индукции доказана справедливость полученного выражения для вычисления орта луча, преломленного системой плоских произвольно расположенных преломляющих поверхностей.

Ключевые слова: *закон преломления, матричная форма, полная индукция.*

Коды OCIS: 220.0220, 080.1753

Поступила в редакцию 24.12.2013

Зеркально-призменные системы, образованные сочетанием плоских преломляющих и отражающих поверхностей, широко применяются в оптических системах оптических и оптико-электронных приборов. При расчете оптических систем отражающие поверхности заменяются разверткой отражений в плоскости главного сечения, с помощью которой достигается спрямление хода лучей в системах плоских зеркал и приведение зеркально-призменных систем к эквивалентным им плоскопараллельным пластинкам [1]. В общем случае из-за погрешностей изготовления компланарность нормалей к поверхностям зеркально-призменных систем нарушается, а развертка отражений в призме приобретает клиновидность. При реальном расположении поверхностей зеркально-призменных систем (в том числе и без учета погрешностей изготовления) принятые в вычислительной оптике методы расчета лучей не применимы. Рассмотрим векторный и матричный методы расчета направления преломленных и отраженных лучей поверхностями зеркально-призменных систем. Определим, прежде всего, основные понятия, которыми будем пользоваться.

В предположении, что длина волны света $\lambda_0 \to 0$, получено основное уравнение геометрической оптики в виде [2, 3]

$$(\mathrm{grad}L)^2 = n^2. \qquad (1)$$

Функцию $L(\mathbf{r})$ называют эйконалом, где $\mathbf{r}$ – векторная функция положения, n – показатель преломления среды, а уравнение (1) – уравнением эйконала. Геометрические световые лучи можно определить как траектории перемещения плотности световой энергии, ортогональные геометрическим волновым фронтам $L = \mathrm{const}$. Энергия, протекающая за время t через основание цилиндра, ось которого параллельна орту $\mathbf{p}$, а площадь поперечного сечения равна единице, равна энергии, содержащейся в цилиндре длиной Vt, где V – скорость распространения электромагнитного поля в пространстве. Следовательно, поток энергии, равный энергии, протекающей через основание цилиндра в единицу времени, равен Vw, где w – плотность энергии электромагнитного поля. Известно, что вектор Умова–Пойнтинга определяется выражением

$$\mathbf{G} = Vw\mathbf{p}, \tag{2}$$

где $\mathbf{p} = \mathrm{grad}L/n = \mathrm{grad}L/|\mathrm{grad}L|$. (3)

Отсюда следует, что в приближении геометрической оптики направление вектора Умова–Пойнтинга совпадает с нормалью к геометрическому волновому фронту, а средняя плотность полной энергии электромагнитного поля распространяется со скоростью $V = c/n$, где c – скорость света в вакууме.

Если радиус-вектор $\mathbf{r}(l)$ точки P, расположенной на траектории луча, рассматривать как функцию длины l траектории, то отношение $d\mathbf{r}/dl = \mathbf{p}$. При этом выражение (3) можно представить в виде

$$nd\mathbf{r}/dl = \mathrm{grad}L(\mathbf{r}). \tag{4}$$

Умножив выражение (4) скалярно на орт $\mathbf{p}$, получаем $n = (d\mathbf{r}/dl)\mathrm{grad}L(\mathbf{r})$.

В последнем выражении

$$d\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}L(\mathbf{r}) = \left(\partial L(x,y,z)/\partial x\right)dx + \\ +\left(\partial L(x,y,z)/\partial y\right)dy + \\ +\left(\partial L(x,y,z)/\partial z\right)dz = dL(\mathbf{r}).$$

При этом $n = dL(\mathbf{r})/dS$, где S – площадь поперечного сечения цилиндра. Дифференцируя выражение (4) по l, получаем

$$\left(d/dl\right)\left(n\,dr/dl\right) = \left(d/dl\right)\mathrm{grad}L(\mathbf{r}) = \\ = \left(d/d\mathbf{r}\right)\left(d\mathbf{r}/l\right)\mathrm{grad}L(\mathbf{r}) = \left(d/d\mathbf{r}\right)\left(dL(\mathbf{r})/dl\right) = \\ = dn/d\mathbf{r} = \left(d\mathbf{r}/d\mathbf{r}\right)\mathrm{grad}n, \tag{5}$$

т.е. $\left(d/dl\right)\left(n\,dr/dl\right) = \mathrm{grad}n$.

В однородной среде $n = \mathrm{const}$. При этом уравнение (5), определяющее траекторию луча, принимает вид $d^2\mathbf{r}/dl^2 = 0$. Очевидное решение этого уравнения можно представить в виде прямой линии: $\mathbf{r} = \mathbf{A}l + \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – постоянные векторы.

Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ – орты падающего и преломленного лучей, n, n' – показатели преломления разделяемых сред, $\mathbf{N}$ – орт нормали к поверхности в точке падения луча. Тогда закон преломления луча на поверхности раздела двух сред произвольной формы можно записать в виде

$$n\mathbf{A}\times\mathbf{N} = n'\mathbf{A}'\times\mathbf{N}. \tag{6}$$

Из формулы (6) следует, что $\mathbf{A}\times\mathbf{N}\,\|\,\mathbf{A}'\times\mathbf{N}$. Луч падающий, луч преломленный и нормаль к поверхности в точке падения луча лежат в одной плоскости, при этом модули векторов, определяемых векторными произведениями в выражении (6), взаимосвязаны соотношением

$$n\sin\varepsilon = n'\sin\varepsilon', \tag{7}$$

где ε, ε' – углы падения и преломления луча. Выражение (6) можно представить в виде

$$(n'\mathbf{A}' - n\mathbf{A})\times\mathbf{N} = 0. \tag{8}$$

Векторы $n\mathbf{A}$ и $\mathbf{N}$ параллельны друг другу, при этом разность векторов $(n\mathbf{A}' - n\mathbf{A})$ отличается от вектора $\mathbf{N}$ только модулем, т.е.

$$n'\mathbf{A}' - n\mathbf{A} = \mu\mathbf{N}, \tag{9}$$

где μ – скалярный множитель. Умножив левую и правую части выражения (9) скалярно на $\mathbf{N}$, получаем $\mu = n'\mathbf{A}'\mathbf{N} - n\mathbf{AN}$. При этом выражение (9) принимает вид

$$\mathbf{A}' = \left(n/n'\right)\mathbf{A} + \mathbf{N}(\mathbf{A}'\mathbf{N}) - \left(n/n'\right)\mathbf{N}(\mathbf{AN}). \tag{10}$$

Правую часть выражения (10) можно представить в форме детерминанта

$$\mathbf{A}' = \left(n/n'\right)\begin{vmatrix}\mathbf{A} & (\mathbf{AN}) - \left(n/n'\right)(\mathbf{A}'\mathbf{N}) \\ \mathbf{N} & 1\end{vmatrix}. \tag{11}$$

Свойство определителей, в соответствии с которым при сложении двух определителей, различающихся только одной строкой, соответствующие элементы этой строки складываются [4], позволяет выражение (11) представить в виде

$$\mathbf{A}' = \left(n/n'\right)\begin{vmatrix}\mathbf{A} & (\mathbf{AN}) \\ \mathbf{N} & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & (\mathbf{A}'\mathbf{N}) \\ \mathbf{N} & 1\end{vmatrix}. \tag{12}$$

Скалярное произведение $(\mathbf{A}'\mathbf{N})$, где $\mathbf{A}'$– искомый орт преломленного луча, найдем, применив закон преломления (7)

$$(\mathbf{A}'\mathbf{N}) = \cos\varepsilon' = \\ = \sqrt{1 - \left(n^2/n'^2\right) + \left(n^2/n'^2\right)\cos^2\varepsilon} = \\ = \sqrt{1 - \left(n^2/n'^2\right) + \left(n^2/n'^2\right)(\mathbf{AN})^2}. \tag{13}$$

Подставив это соотношение в выражение (12), получаем

$$\mathbf{A}' = (n/n')\times$$
$$\times\begin{vmatrix}\mathbf{A} & (\mathbf{AN})\\ \mathbf{N} & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & \sqrt{1-(n^2/n'^2)\left[1-(\mathbf{AN})^2\right]}\\ \mathbf{N} & 1\end{vmatrix}. \quad (14)$$

Вполне очевидно, что в этом выражении условие $n'^2/n^2 \geq 1 - (\mathbf{AN})^2$ нарушается только при полном внутреннем отражении.

В общем случае при $n = n_k$ и $\mathbf{A} = \mathbf{A}_k - n' = n_{k+1}$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{k+1}$. Тогда в соответствии с выражением (10) при преломлении луча на первой поверхности имеем

$$\mathbf{A}_2 = (n_1/n_2)\mathbf{A}_1 + \left[(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1) - (n_1/n_2)(\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1)\right]\mathbf{N}_1. \quad (15)$$

Единичный вектор луча, преломленного на второй поверхности,

$$\mathbf{A}_3 = (n_2/n_3)\mathbf{A}_2 + \left[(\mathbf{A}_3\mathbf{N}_2) - (n_2/n_3)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_2)\right]\mathbf{N}_2. \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) можно представить в виде определителей

$$\mathbf{A}_2 = (n_1/n_2)\begin{vmatrix}\mathbf{A}_1 & (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1) - (n_2/n_1)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1)\\ \mathbf{N}_1 & 1\end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_3 = (n_2/n_3)\begin{vmatrix}\mathbf{A}_2 & (\mathbf{A}_2\mathbf{N}_2) - (n_3/n_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{N}_2)\\ \mathbf{N}_1 & 1\end{vmatrix}. \quad (18)$$

Подставив выражение (15) в выражение (16), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_3 = (n_1/n_3)\{\mathbf{A}_1 - \left[(\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1) - (n_2/n_1)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1)\right]\mathbf{N}_1 - \\ -\left[(\mathbf{A}_1\mathbf{N}_2)(n_3/n_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{N}_2)\right]\mathbf{N}_2 + \\ +\left[(\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1)(n_2/n_1)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1)\right](\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)\mathbf{N}_2\}.\end{aligned} \quad (19)$$

Это выражение можно представить определителем вида

$$\mathbf{A}_3 = (n_1/n_3)\times$$
$$\times\begin{vmatrix}\mathbf{A}_1 & (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1) - (n_2/n_1)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1) & (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_2) - (n_3/n_1)(\mathbf{A}_3\mathbf{N}_2)\\ \mathbf{N}_1 & 1 & (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)\\ \mathbf{N}_2 & 0 & 1\end{vmatrix}, \quad (20)$$

где $(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1) = \sqrt{1-(n_1^2/n_2^2) + (n_1^2/n_3^2)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1)^2}$,

$$(\mathbf{A}_3\mathbf{N}_2) = \sqrt{1-(n_2^2/n_3^2) + (n_2^2/n_3^2)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_2)^2}.$$

Анализ вида полученных выражений позволяет предположить, что орт луча, преломленного на последовательности из m плоских поверхностей с нормалями $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, ..., $\mathbf{N}_m$, определяется выражением (21) [5]

$$\mathbf{A}_{m+1} = (n_1/n_{m+1})\times$$
$$\times\begin{vmatrix}\mathbf{A}_1 & a & b & \dots & (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_m) - \dfrac{n_{m+1}}{n_1}(\mathbf{A}_{m+1}\mathbf{N}_m)\\ \mathbf{N}_1 & 1 & (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) & \dots & (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_m)\\ \mathbf{N}_2 & 0 & 1 & \dots & (\mathbf{N}_2\mathbf{N}_m)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{N}_{m-1} & 0 & 0 & \dots & (\mathbf{N}_{m-1}\mathbf{N}_m)\\ \mathbf{N}_m & 0 & 0 & \dots & \end{vmatrix}, \quad (21)$$

где $a = (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1) - (n_2/n_1)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1)$, $b = (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_2) - (n_3/n_1)(\mathbf{A}_3\mathbf{N}_2)$, $d = (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_m) - (n_{m+1}/n_1)(\mathbf{A}_{m+1}\mathbf{N}_m)$. Из этого выражения следует, что при одном преломлении орт луча

$$\mathbf{A}_2 = (n_1/n_2)\begin{vmatrix}\mathbf{A}_1 & (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1) - (n_2/n_1)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1)\\ \mathbf{N}_1 & 1\end{vmatrix} =$$
$$= (n_1/n_2)\mathbf{A}_1 + \left[(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1) - (n_1/n_2)(\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1)\right]\mathbf{N}_1,$$

т.е. при $m = 1$ формула (21) принимает вид формулы (15). Применение метода полной (математической) индукции [4] позволяет доказать справедливость полученного определителя для вычисления орта луча, преломленного системой плоских произвольно расположенных преломляющих поверхностей.

Для вычисления угла, образованного ортом $\mathbf{A}_{m+1}$ луча с выбранным или заданным направлением, определяемым ортом $\mathbf{q}$, применим формулу (21). В результате получаем

$$\cos(\mathbf{A}_{m+1},\mathbf{q}) = \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{q} = -(n_1/n_{m+1})\times$$
$$\times\begin{vmatrix}(\mathbf{A}_1\mathbf{q}) & (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_1) - (n_2/n_1)(\mathbf{A}_2\mathbf{N}_1) & \dots & (\mathbf{A}_1\mathbf{N}_m) - (n_{m+1}/n_1)(\mathbf{A}_{m+1}\mathbf{N}_m)\\ (\mathbf{N}_1\mathbf{q}) & 1 & \dots & (\mathbf{N}_1\mathbf{N}_m)\\ (\mathbf{N}_2\mathbf{q}) & 0 & \dots & (\mathbf{N}_2\mathbf{N}_m)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\mathbf{N}_{m-1}\mathbf{q}) & 0 & \dots & (\mathbf{N}_{m-1}\mathbf{N}_m)\\ (\mathbf{N}m\mathbf{q}) & 0 & \dots & 1\end{vmatrix}. \quad (22)$$

Заметим, что в общем случае

$$(\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{N}_k)= \\ =\sqrt{1-(n_k/n_{k+1})^2+(n_k/n_{k+1})^2(\mathbf{A}_k\mathbf{N}_k)}. \qquad (23)$$

При номинальных размерах углов между преломляющими и отражающими гранями зеркально-призменных систем нормали к поверхностям лежат в плоскости главного сечения призм или параллельны к ней, т.е. нормали ко всем граням призм компланарны. Однако в процессе изготовления призм это условие практически неизбежно нарушается. Вполне очевидно, что если одна из противолежащих ребру граней призмы и ребро не параллельны друг другу, то нормаль к этой грани будет некомпланарна нормалям к граням, образующим ребро. Если в качестве базовой плоскости выбрана плоскость главного сечения зеркально-призменной системы, то нормаль к любой грани призмы может быть компланарна этой плоскости или некомпланарна (декомпланарна) ей. При этом декомпланарность нормали к любой грани относительно базовой плоскости призмы можно оценить в угловой мере.

Декомпланарность нормалей к поверхностям призмы приводит к отклонению преломленного луча от номинального направления, а соответственно, и оптической оси, что определяет децентрировку составных частей оптической системы. Для определения угла отклонения луча, прошедшего через призму с декомпланарными нормалями к поверхностям, применим закон преломления, определяемый формулой (6). Представим орты $\mathbf{N}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ их проекциями на оси координат

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\sin\alpha+\mathbf{k}\varphi, \qquad (24)$$

$$\mathbf{A}'=\mathbf{i}\cos\alpha'+\mathbf{j}\sin\alpha'+\mathbf{k}\varphi', \qquad (25)$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{i}\cos\beta+\mathbf{j}\sin\beta+\mathbf{k}\omega, \qquad (26)$$

где φ – угол между ортом $\mathbf{A}$ падающего луча после преломления на предыдущей поверхности (или одной из предыдущих поверхностей), нормаль которой декомпланарна плоскости главного сечения, и плоскостью главного сечения (базовой плоскостью), φ' – угол между ортом $\mathbf{A}'$ преломленного луча и плоскостью главного сечения (базовой плоскостью), ω – угол между ортом $\mathbf{N}$ нормали к преломляющей поверхности и плоскостью главного сечения (базовой плоскостью).

Заменив орты $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{N}$ в формуле закона преломления выражениями (24), (25) и (26), получаем

$$\mathbf{i}n(\varphi\sin\beta-\omega\cos\alpha)+\mathbf{j}n(\varphi\cos\beta-\omega\cos\alpha)+ \\ +\mathbf{k}n(\cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha)= \\ =\mathbf{i}n'(\varphi'\sin\beta-\omega\cos\alpha')+\mathbf{j}n'(\varphi'\cos\beta- \\ -\omega\cos\alpha')+\mathbf{k}n'(\cos\beta\sin\alpha'-\sin\beta\cos\alpha'). \qquad (27)$$

Из равенства векторов, определяемых выражением (27), следует, что они одинаково направлены, и равны их модули, а следовательно, равны их проекции на соответствующие оси координат. В результате получаем систему из трех уравнений

$$n(\varphi\sin\beta-\omega\sin\alpha)=n'(\varphi'\sin\beta-\omega\sin\alpha'),$$

$$n(\varphi\cos\beta-\omega\cos\alpha)=n'(\varphi'\cos\beta-\omega\cos\alpha'),$$

$$n(\cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha)=n'(\cos\beta\sin\alpha'-\sin\beta\cos\alpha').$$

Полученные выражения можно представить в виде

$$\varphi'\sin^2\beta=n(\varphi\sin^2\beta-\omega\sin\alpha\sin\beta)/n'+\omega\sin\alpha'\sin\beta,$$

$$\varphi'\cos^2\beta=n(\varphi\cos^2\beta-\omega\cos\alpha\cos\beta)/n'+\omega\cos\alpha'\cos\beta,$$

$$n\sin(\alpha-\beta)=n'\sin(\alpha'-\beta').$$

Сложив левые и правые части первых двух выражений, получаем

$$\varphi'=(n/n')\varphi-\omega[n\cos(\alpha-\beta)-n'\cos(\alpha'-\beta)]/n'. \qquad (28)$$

Заметим, что скалярное произведение

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{N}=\cos\varepsilon_0=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\omega\varphi= \\ =\cos(\alpha-\beta)+\omega\varphi.$$

По сути рассматриваемой задачи углы φ и ω малы. Тогда с погрешностью, не превышающей величины второго порядка малости, можно считать, что $\cos\varepsilon_0=\cos(\alpha-\beta)$. Аналогично находим, что $\cos\varepsilon_0'=\cos(\alpha'-\beta)$. При этом выражение (28) принимает вид

$$\varphi'=(n/n')\varphi-\omega(n\cos\varepsilon_0-n'\cos\varepsilon_0')/n', \qquad (29)$$

где ε_0 и ε_0' – углы падения и преломления луча при $\varphi=0$ и $\omega=0$. В общем случае это выражение можно представить как

$$\varphi_{m+1}=(n_m/n_{m+1})\varphi_m- \\ -\omega_m(n_m\cos\varepsilon_{0m}-n_{m+1}\cos\varepsilon_{0m}')/n_{m+1}. \qquad (30)$$

Записанное в таком виде выражение (30) представляет собой инвариант, рассмотренный в работе [6], который можно назвать инвариантом декомпланарности [7]. Этому выражению можно придать симметричную форму

$$n_m\left(\varphi_m-\omega_m\cos\varepsilon_{om}\right)= =n_{m+1}\left(\varphi_{m+1}-\omega_m\cos\varepsilon'_{om}\right), \quad (31)$$

где $\varphi_{m+1} = \varphi'_m$. Последовательное применение выражения (31) к каждой из поверхностей призмы позволяет получить размер угла отклонения луча, выходящего из призмы, от плоскости ее главного сечения (базовой поверхности).

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. Вычислительная оптика: Справочник / Под общ. ред. Русинова М.М. Л.: Машиностроение, ЛО, 1984. 423 с.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
3. *Зверев В.А., Точилина Т.В.* Основы оптотехники / Учебное пособие. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2005. 293 с.
4. *Kaspar E.* Systemes de reflexions et de refractions // Revue d'Optique. T. 27. № 1. 1948. P. 15–28.
5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
6. *Чуриловский В.Н.* Инварианта пирамидальности // ОМП. 1932. № 11. С. 7–11.
7. *Зверев В.А., Рытова Е.С., Тимощук И.Н.* Погрешность изготовления и установки отражательных призм // Оптический журнал. 2011. Т. 78. № 3. С. 14–20.