УДК 535.317.1

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ОПТОТЕХНИКИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСВЕЩЕННОСТИ

© 2014 г. А. В. Гапеева, аспирант; **В. А. Зверев**, доктор техн. наук

НИУ ИТМО, Санкт-Петербург

E-mail: post_vaz@rambler.ru

На основании основного закона геометрической оптики и понятия об эйконале дано определение прямой и обратной задачи расчета светового поля при формировании двумерного распределения освещенности. Показано, что при однозначном решении прямой задачи любое решение обратной задачи является частным решением, достигаемым путем последовательного подбора требуемой формы волнового фронта. Успех подбора на всех стадиях его осуществления легко проверяется путем решения прямой задачи.

Ключевые слова: *поток энергии, эйконал, световой луч, световая трубка, геометрический фактор, оптический фактор, инвариант Штраубеля.*

Коды OCIS: 220.0220, 220.4298.

Поступила в редакцию 31.10.2013.

Пусть W – полная энергия, заключенная внутри объема V. При этом в замкнутой системе в непроводящей среде, свободной от зарядов и токов, изменение энергии электромагнитного поля определяется выражением [1, 2]

$$\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V\left(w_e+w_m\right)dV=$$
$$=\frac{d}{dt}\int_V w\,dV=-\int_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

где w_e – плотность энергии электрического поля; w_m – плотность энергии магнитного поля; n – орт нормали к замкнутой поверхности S, ограничивающей объем V. Плотность потока энергии электромагнитного поля определяется вектором Умова–Пойнтинга

$$\mathbf{G}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}, \tag{1}$$

где c – скорость света в вакууме, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, причем $\sqrt{\varepsilon}\mathrm{E} = \sqrt{\mu}\mathrm{H}$. Однако известно, что $w = w_e + w_m = (c/(4\pi))\mathrm{E}^2 = (c/(4\pi))\mathrm{H}^2$. Тогда

$$\mathbf{G}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{c}{4\pi}EH\mathbf{s}=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\mathbf{s}=\frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{s}, \tag{2}$$

где $\mathbf{s}$ – орт направления вектора Умова–Пойнтинга.

Заметим, что впервые вектор плотности потока любой энергии был введен в 1874 году русским физиком Николаем Алексеевичем Умовым. Направление вектора Умова–Пойнтинга перпендикулярно векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и совпадает с направлением распространения электромагнитной энергии, а его величина равна энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору $\mathbf{G}$. Практически важен усредненный во времени вектор Умова–Пойнтинга, величина которого служит мерой интенсивности света, а направление указывает направление его распространения.

Гармоническое электромагнитное поле в общем случае можно определить уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где векторы $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ определяются комплексными векторными функциями положения. Однородную плоскую волну, распространяющуюся в среде с показателем преломления $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{s}$, можно представить следующими векторными функциями:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})=\mathbf{e}(\mathbf{r})\exp(ik_0 n\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})\\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r})=\mathbf{h}(\mathbf{r})\exp(ik_0 n\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ – векторные функции положения, обязательно комплексные, если необходимо учесть все возможные состояния поляризации излучения; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. Заметим, что уравнение $\mathbf{s} \times \mathbf{r} = \text{const}$ определяет плоскость, а произведение $n\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}$ определяет оптический путь от начала отсчета до плоскости, отсчитываемый в направлении орта $\mathbf{s}$. При этом комплексные векторные функции положения можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}(\mathbf{r})\exp[ik_0 L(\mathbf{r})]\\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= \mathbf{h}(\mathbf{r})\exp[ik_0 L(\mathbf{r})]\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где $L(\mathbf{r})$ – вещественная скалярная функция положения. В случае элементарной плоской волны $\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \approx r$. Множество элементарных плоских волн при $L(\mathbf{r}) = \text{const}$ образует поверхность, которую называют геометрической волновой поверхностью или геометрическим волновым фронтом.

Применив к выражениям (5) известные векторные тождества, при $\lambda_0 \to 0$ получаем

$$(\operatorname{grad} L)^2 = n^2 \tag{6}$$

или $$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2, \tag{7}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления. Функцию $L(\mathbf{r})$ называют эйконалом, а уравнение в форме (6) или (7) – уравнением эйконала.

Средняя во времени величина вектора Умова–Пойнтинга определяется выражением

$$\langle \mathbf{G} \rangle = \frac{2c}{\varepsilon\mu}\langle w_e \rangle \operatorname{grad} L. \tag{8}$$

Средняя во времени плотность полной энергии – $\langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle = 2\langle w_e \rangle$. При $\varepsilon\mu = n^2$ отношение $c/(\varepsilon\mu)^{1/2} = V$, а отношение $\operatorname{grad}L/n$ (в соответствии с уравнением (6) эйконала) определяет некоторый единичный вектор $\mathbf{s}$

$$\mathbf{s} = \frac{\operatorname{grad} L}{n} = \frac{\operatorname{grad} L}{|\operatorname{grad} L|}. \tag{9}$$

В результате получаем $\langle \mathbf{G} \rangle = V\langle w \rangle \mathbf{s}$. (10)

Отсюда следует, что направление усредненного во времени вектора Умова–Пойнтинга совпадает с нормалью к геометрическому волновому фронту, а его абсолютная величина равна произведению средней плотности энергии на скорость $V = c/n$. Полученные результаты позволяют ввести понятие геометрических световых лучей.

Геометрические световые лучи можно определить как траектории перемещения световой энергии, ортогональные геометрическим волновым фронтам, при этом направление перемещения в каждой точке траектории совпадает с направлением усредненного вектора Умова–Пойнтинга.

Пусть $P(\xi,\eta)$ – произвольная точка на некоторой излучающей поверхности S, отнесенная к некоторой криволинейной системе координат на этой поверхности. При этом световой поток (усредненный во времени), излучаемый площадкой dS поверхности S в телесный угол $d\omega$ в направлении, определяемом полярными углами (α, β), равен [3, 4]

$$d^2\Phi = L\,d\omega\,dS\cos\varepsilon, \tag{11}$$

где L – фотометрическая яркость излучения площадки dS в точке (ξ,η) в направлении (α, β), т.е. в общем случае $L = L(\xi, \eta, \alpha, \beta)$; ε – угол между направлением (α, β) и нормалью к элементу поверхности, как показано на рис. 1. Множитель $\cos\varepsilon$ в выражении (11) свидетельствует о том, что физический смысл имеет не сам элемент поверхности dS, а его проекция на плоскость, перпендикулярную к направлению (α, β).

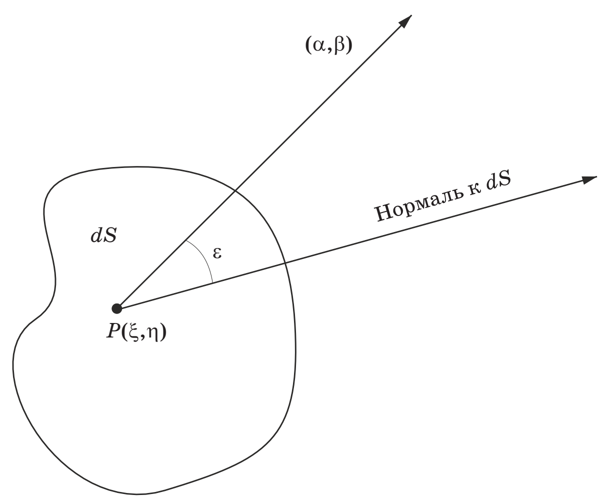

Рис. 1. Световой поток, излучаемый площадкой dS.

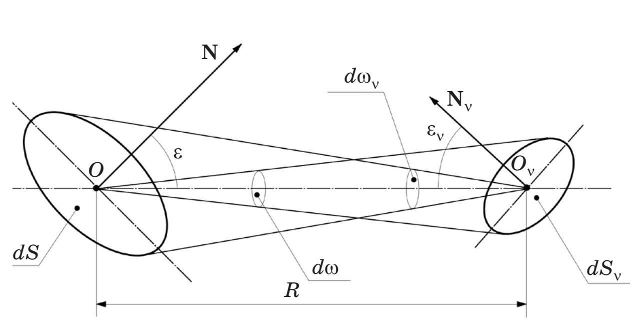

Рис. 2. Формирование световой трубки.

Пусть сечение телесного угла $d\omega$ наклонной плоскостью образует площадку dS_ν на некотором расстоянии R от площадки dS вдоль оси телесного угла $d\omega$, нормаль к которой образует угол ε_ν, как показано на рис. 2. При этом

$$d^2\Phi = L\frac{dS_\nu \cos\varepsilon_\nu}{R^2}dS\cos\varepsilon = Ld\omega_\nu dS_\nu \cos\varepsilon_\nu. \quad (12)$$

С другой стороны, световой поток, проходящий через площадку dS_ν,

$$d^2\Phi_\nu = L_\nu d\omega_\nu dS_\nu \cos\varepsilon_\nu. \quad (13)$$

В общем случае $d^2\Phi_\nu = \tau d^2\Phi$, где τ – коэффициент пропускания среды, разделяющей площадки dS и dS_ν. Поскольку в рассматриваемом случае нас интересуют лишь соотношения геометрических величин, среду будем считать абсолютно прозрачной, что эквивалентно равенству $\tau = 1$. При этом из сопоставления выражений (12) и (13) следует, что $L = L_\nu$.

Совокупность геометрических лучей, заполняющих телесный угол $d\omega$, образует гомоцентрический пучок лучей, исходящих из точки излучающего элемента, опирающийся на освещаемый элемент. Совокупность геометрических лучей, проходящих через две произвольно расположенные площадки (диафрагмы), размеры которых значительно меньше расстояния между ними, образует совокупность геометрических пучков лучей, называемую физическим пучком, при этом поверхность, ограничивающую поперечные размеры физического пучка, принято называть световой трубкой.

Из сопоставления выражений (11) и (12) следует, что

$$d\omega dS\cos\varepsilon = d\omega_\nu dS_\nu \cos\varepsilon_\nu. \quad (14)$$

Величину $d^2G = d\omega dS\cos\varepsilon$ называют геометрическим фактором пучка световых лучей. Инвариантность геометрического фактора d^2G относительно площадок dS и dS_ν физического пучка, определяемая выражением (14), означает, что он является мерой множества геометрических лучей, составляющих физический пучок, не зависящий от того, какая из площадок является излучающей. Очевидно, что геометрический фактор элементарного физического пучка, ограниченного площадкой dS и площадкой dS_ν, образованной сечением телесного угла $d\omega$ плоскостью, не зависит от выбора расстояния R между ними, а следовательно, не зависит от выбора расстояния R (при $\tau = 1$) и величина светового потока, проходящего через площадки dS и dS_ν, контуры которых образуют контуры световой трубки. При этом яркость излучения в каждом сечении телесного угла плоскостью остается неизменной. Поэтому яркость $L_\nu = L$ можно считать яркостью элементарного физического пучка.

В том случае, когда одна из площадок световой трубки расположена на поверхности раздела двух сред, взаимосвязь телесных углов до и после преломления световой трубки на поверхности раздела двух сред определяется формулой

$$n_\nu^2 \cos\varepsilon_\nu d\omega_\nu = n_\nu'^2 \cos\varepsilon_\nu' d\omega_\nu'. \quad (15)$$

Умножив обе части выражения (15) на величину $dS_\nu = dS_\nu'$, получаем

$$n_\nu^2 d\omega_\nu dS_\nu \cos\varepsilon_\nu = n_\nu'^2 d\omega_\nu' dS_\nu \cos\varepsilon_\nu'. \quad (16)$$

Полученное выражение справедливо для любой из площадок преломляемой и преломленной световых трубок.

Величину $n^2 d^2G = n^2 d\omega dS\cos\varepsilon$ называют оптическим фактором. Оптический фактор удовлетворяет условию $n^2 d^2G = \mathrm{const}$ при произвольном числе преломляющих поверхностей. Это условие определяет основной инвариант для световой трубки, называемый теоремой, или инвариантом, Штраубеля.

При абсолютной прозрачности сред, разделяемых преломляющими поверхностями, согласно закону сохранения энергии, световой поток, проходящий через световую трубку, претерпевающую какое угодно число преломлений, в соответствии с выражением (13) определяется как

$$d^2\Phi = L_1 d\omega_1 dS_1 \cos\varepsilon_1 = \ldots = L_\nu d\omega_\nu dS_\nu \cos\varepsilon_\nu = \\ = \ldots = L_p d\omega_p dS_p \cos\varepsilon_p. \quad (17)$$

Разделив эти равенства почленно на инвариант Штраубеля, получаем $L_1/n_1^2 = \ldots = L_\nu/n_\nu^2 = L_p/n_p^2 = L_0$, где L_0 – так называемая редуцированная (или приведенная к вакууму) яркость.

Если dS_i – освещаемая элементарная площадка, освещенность которой $E_i = d^2\Phi / dS_i$, то из выражения (17) следует, что

$$d^2\Phi = E_i dS_i = E_{i+1} dS_{i+1}. \quad (18)$$

Пусть в собственной системе координат площадка $dS_i = d\xi' d\eta'$, а площадка $dS_{i+1} = dx_p' dy_p'$. В этом случае второе равенство выражения (18) можно представить в виде [5]

$$E(x_p', y_p') dx_p' dy_p' = E(\xi', \eta')|J| d\xi' d\eta', \quad (19)$$

где $J=\begin{vmatrix} \dfrac{dx'_p}{d\xi'} & \dfrac{dx'_p}{d\eta'} \\ \dfrac{dy'_p}{d\xi'} & \dfrac{dy'_p}{d\eta'} \end{vmatrix}$ – абсолютная величина якобиана.

Поскольку $E(x'_p,y'_p)=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x'_p \partial y'_p}$, а $E(\xi',\eta')=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\xi'\partial\eta'}$, выражение (19) можно рассматривать как частный случай дифференциального уравнения Монжа–Ампера [6], определяющего взаимосвязь освещенностей двух поверхностей.

Пусть $E(\xi',\eta')$ – освещенность поверхности равного эйконала (волнового фронта), а $E(x'_p,y'_p)$ – освещенность освещаемой поверхности. Световой поток, проходящий через площадку $dS_i = d\xi' d\eta'$, распространяется по нормали к волновой поверхности. Следовательно, форма волновой поверхности однозначно определяет характер распределения светового потока на освещаемой поверхности $S_{i+1}(x'_p,y'_p)$. Расчет распределения освещенности некоторой поверхности при известной форме поверхности равного эйконала называется решением прямой задачи. Прямая задача решается однозначно. Примером решения прямой задачи может служить определение освещенности в изображении точки в геометрическом приближении (без учета явления дифракции) при сферической форме волнового фронта, т.е. в случае безаберрационного изображения точки. Рассмотрим решение этой задачи.

Элементарный световой поток $d^2\Phi$, излучаемый элементом dS, расположенным на оптической оси перпендикулярно к ней, и проходящий через элементарную площадку $d\Sigma$ входного зрачка оптической системы в пределах телесного угла $d\omega$ (см. рис. 3), определяется выражением (11) как

$$d^2\Phi = L_\sigma d\omega dS\cos\sigma. \qquad (20)$$

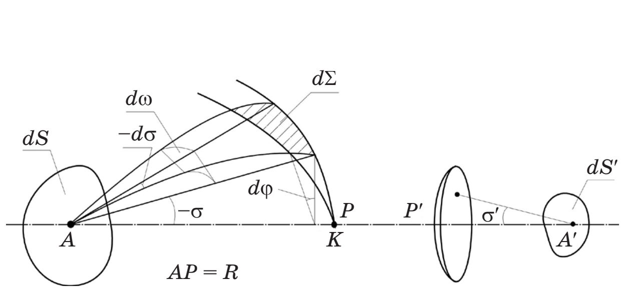

Рис. 3. Элементарный световой поток, излучаемый осевым элементом поверхности предмета.

Здесь L_σ – яркость излучающего элемента в направлении, образующем угол σ с оптической осью; $d\omega$ – элементарный телесный угол с вершиной в осевой точке площадки dS; σ – угол между осью телесного угла $d\omega$ и оптической осью. Обозначив отрезок $AP = -R$, в соответствии с рисунком получаем

$$d\omega=\frac{d\Sigma}{R^2}=\frac{R\sin\sigma d\varphi R d\sigma}{R^2}=\sin\sigma d\sigma d\varphi. \qquad (21)$$

При этом

$$d^2\Phi = L_\sigma dS\sin\sigma\cos\sigma d\sigma d\varphi, \qquad (22)$$

где $d\varphi$ – элементарный двугранный угол между двумя меридиональными (проходящими через оптическую ось) плоскостями, как показано на рис. 3, и составляющими боковые стенки телесного угла $d\omega$. Для определения светового потока $d\Phi$, излучаемого элементарной площадкой dS и заполняющего весь входной зрачок оптической системы, проинтегрируем выражение (22) по всей площади входного зрачка, т.е. в пределах изменения переменных $0 \le \varphi \le 2\pi$ и при круглой форме зрачка $0 \le \sigma \le \sigma_к$ где $\sigma_к$ – значение угла σ, соответствующего краю входного зрачка, т.е. апертурный угол осевого пучка лучей в пространстве предметов. В результате получаем

$$d\Phi=\int_0^{\sigma_к}\int_0^{2\pi} L_\sigma dS\sin\sigma\cos\sigma d\sigma d\varphi. \qquad (23)$$

Задача определения потока $d\Phi$ существенно упрощается, если предположить, что яркость $L_\sigma = L = \mathrm{const}$, т.е. является величиной постоянной во всех точках излучающего элемента dS и не зависит от угла излучения σ (при этом говорят, что элемент dS излучает по закону Ламберта). При этом условии выражение (23) можно переписать в виде

$$d\Phi = LdS\int_0^{\sigma_к}\int_0^{2\pi}\sin\sigma\cos\sigma d\sigma d\varphi. \qquad (24)$$

В результате интегрирования выражение (24) принимает вид

$$d\Phi=\pi L dS\sin^2\sigma. \qquad ...(25)$$

Этот световой поток проходит через оптическую систему и падает на элементарную площадку dS', которая становится изображением площадки dS, как показано на рис. 3. Очевидно, что световой поток $d\Phi'$, падающий на площадку dS', определится аналогичным выражением:

$$d\Phi' = \pi L' dS' \sin^2 \sigma', \tag{26}$$

где σ' – апертурный угол осевого пучка лучей в пространстве изображений (или задний апертурный угол оптической системы).

Если принять во внимание тот факт, что в реальной оптической системе неизбежны потери светового потока (поглощение, френелево отражение на поверхностях раздела двух сред), учитываемые коэффициентом пропускания $\tau(\tau < 1)$, то вместо светового потока $d\Phi$ из системы выходит поток $d\Phi' = \tau d\Phi$, который меньше потока $d\Phi$, –

$$d\Phi' = \tau\pi L' dS' \sin^2 \sigma', \tag{27}$$

где $L' = (n'/n)^2 L$. При $n' = n$ имеем $L' = L$. При этом освещенность в каждой точке изображения естественным образом определяется отношением элементарного светового потока к элементарной площадке, на которую он падает, т.е. $E_0 = d\Phi'/dS'$. Используя формулу (27), находим, что освещенность E_0 в осевой точке изображения определяется выражением

$$E_0 = \tau\pi L' \sin^2 \sigma'. \tag{28}$$

Предположим, что апертурная диафрагма играет роль выходного зрачка оптической системы. В этом случае освещенность в некоторой точке, расположенной вне оптической оси в плоскости изображения, определяется выражением

$$E = E_0 \cos^4 w', \tag{29}$$

где w' – угол между главным лучом и оптической осью (полевой угол в пространстве изображений). Если зрачок глаза совместить с изображением точечного источника излучения, то выходной зрачок оптической системы будет виден полностью освещенным. При вычислении распределения освещенности в изображении точки распределение освещенности в выходном зрачке принято считать равномерным. При поперечном смещении глаза видимая освещенность выходного зрачка исчезает.

В случае неизображающей оптики (nonimaging optics) освещенность в каждой точке освещаемой поверхности определяется относительной величиной площади выходного зрачка, видимой освещенной из этой точки. При этом видимая освещенной площадь зрачка может состоять из произвольно расположенных элементарных площадок. Отсюда следует, что нет однозначного соответствия между распределением освещенности на освещаемой поверхности и формой поверхности равного эйконала, а соответственно, нет и однозначного аналитического решения задачи определения формы поверхности равного эйконала.

Определение формы поверхности равного эйконала при заданном распределении освещенности некоторой поверхности называется решением обратной задачи. В общем случае любая оптическая система должна формировать волновой фронт, близкий к требуемому. Проектирование любой оптической системы завершается оптимизацией ее параметров по критерию минимального отклонения формируемого волнового фронта от требуемой формы. В случае изображающей оптики решение обратной задачи очевидно и однозначно: форма волнового фронта, формируемого разрабатываемой оптической системой, должна быть близкой к сферической. В случае неизображающей оптики любое решение обратной задачи является частным решением, полученным методом последовательных приближений. При решении этой задачи немалое значение имеет также вид выбранной функции для аппроксимации формы искомой поверхности [7]. Если требуемая форма поверхности равного эйконала определена, то проектирование оптической системы и оптимизацию ее параметров можно осуществлять по критерию минимизации волновой аберрации, т.е. процесс проектирования оптической системы становится традиционным.

Важно отметить, что для определения участка поверхности оптического устройства, светящего по данному направлению, в конце XIX века видный русский ученый – электротехник В.Н. Чиколев – предложил метод элементарных отображений. Этот метод получил развитие в трудах отечественных ученых: Н.А. Карякина, В.В. Кузнецова и М.М. Елина, В.В. Антонова-Романовского и В.Л. Пульвера, Е.И. Берсенева, И.И. Спивак, француза С. Рибьера и американца Ф. Бенфорда. Наряду с этим метод элементарных отображений получил дальнейшее развитие, позволяющее применять его для определения формы оптических устройств светильников, обеспечивающих заданную кривую светораспределения [8].

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зверев В.А.* Основы геометрической оптики. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2002. 218 с.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
3. *Зверев В.А., Точилина Т.В.* Основы оптотехники. Учебное пособие. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2005. 293 с.
4. *Волосов Д.С., Цивкин М.В.* Теория и расчет светооптических систем. М.: Искусство, 1960. 526 с.
5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: ГИТТЛ, 1957. 608 с.
6. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т. 3. М.: «Советская Энциклопедия», 1982. 1184 стб.
7. *Трофимук А.А.* Применение кривых Безье при автоматизированном расчете неизображающих оптических систем // Оптический журнал. 2013. № 4. С. 75–79.
8. *Трембач В.В.* Световые приборы: Учеб. для вузов по спец. «Светотехника и источники света». М.: Высш. шк., 1990. 463 с.