

## СКЕЙЛИНГ В ХАРАКТЕРИСТИКАХ АПЕРИОДИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУР

© 2012 г. П. В. Короленко, доктор физ.-мат. наук; А. Ю. Мишин;  
Ю. В. Рыжикова, канд. физ.-мат. наук

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва

E-mail: pvkorolenko@rambler.ru

Проведен анализ оптических свойств апериодических многослойных структур, построенных с использованием числовых последовательностей Морса–Туэ, двойного периода, Фибоначчи и Рудин–Шапиро. Установлена общая количественная закономерность, определяющая взаимосвязь скейлинга в их фурье-образах и спектральных характеристиках. Рассмотрены некоторые практические аспекты использования апериодических систем.

**Ключевые слова:** апериодические многослойные структуры, скейлинг, кластерная размерность, симметрия самоподобия.

Коды OCIS: 310.4165, 310.6188.

Поступила в редакцию 19.04.2012.

Актуальность исследования апериодических многослойных структур (АМС) [1], в том числе и одномерных фотонных кристаллов, обусловлена рядом причин как прикладного, так и фундаментального характера. Так, АМС могут быть эффективным образом использованы для генерации вторых гармоник [2], компрессии световых импульсов [3], широкодиапазонного отражения излучения [4] и его узкополосной фильтрации [5]. Они находят применение также при разработке и изготовлении элементов рентгеновской оптики [6]. Новые технологии, использующие, в частности, наноструктурированные материалы [7], позволяют изготавливать АМС хорошего качества, насчитывающие несколько сот образующих слоев с заранее заданными показателями преломления.

Общетеоретические аспекты исследований АМС имеют отношение к важной фундаментальной проблеме, связанной с установлением связи между симметрией самоподобия объекта и фрактальными свойствами его оптических характеристик. В свою очередь всестороннее решение этой проблемы позволит усовершенствовать фрактальные методы оптической диагностики объектов различной природы [8, 9].

В данной работе указанная выше проблема рассмотрена на основе численного моделирования применительно к диэлектрическим АМС, построенным с использованием числовых по-

следовательностей Морса–Туэ, двойного периода, Фибоначчи и Рудин–Шапиро [1, 6, 10]. Несмотря на то, что изучению самоподобия в оптических характеристиках данных структур посвящен ряд публикаций [см., например, 1, 11], обойденным оказался важный вопрос о наличии общей количественной закономерности, определяющей взаимосвязь скейлинга в спектрах отражения и пропускания АМС с элементами самоподобия в их структуре. Кроме того, в литературе не нашли освещения свойства АМС, которые в отличие от хорошо изученных четвертьволновых систем (АМС 1-го типа) имеют фиксированную физическую толщину образующих слоев при целочисленных значениях их показателей преломления (АМС 2-го типа) [12].

АМС могут быть представлены в виде блоков элементов  $A$  и  $B$ , соответствующих различным уровням сложности [1]. Блоки первых структурных уровней АМС Морса–Туэ запишутся как  $S_0 = A$ ,  $S_1 = AB$ ,  $S_2 = ABBA$  и т. д. Переход к каждому более высокому структурному уровню может быть осуществлен с помощью правил замены:  $A \rightarrow AB$ ,  $B \rightarrow BA$ . Первые уровни АМС двойного периода характеризуются блоками:  $S_0 = A$ ,  $S_1 = AB$ ,  $S_2 = ABAA$ ,  $S_3 = ABAAABAB$ . Соответствующие правила замены имеют вид:  $A \rightarrow AB$ ,  $B \rightarrow AA$ . Начальные блоки системы Фибоначчи состоят из элементов:  $S_0 = B$ ,

$S_1 = A, S_2 = AB$ . При переходе к более высокому структурному уровню используются правила:  $A \rightarrow AB, B \rightarrow A$ . Низший уровень АМС Рудин–Шапиро может быть представлен в виде  $AAABVBABV$ . Соответствующие правила замены основаны на преобразованиях:  $AA \rightarrow AAAB, AB \rightarrow AABA, BA \rightarrow BVAB, BB \rightarrow BVBA$ . Величины  $A, B$  и порядок их следования определяют в АМС чередование слоев с высоким и низким показателями преломления.

В ходе расчетов спектров отражения (или пропускания) АМС использовался известный матричный метод [13]. Для удобства сравнения спектров отражения различных типов АМС большинство расчетов были выполнены в предположении, что слои  $A$  имели показатель преломления  $N_A = 2$ , а слои  $B - N_B = 3$ . Считалось, что показатель преломления среды, окружающей АМС, равен  $N_C = 1$ .

Наиболее отчетливо самоподобные свойства АМС передают их фурье-спектры [14], которые рассчитываются путем фурье-преобразования системы дельта-функций, координаты которых определяются положением границ между слоями. Поэтому анализ взаимосвязи между самоподобием структуры и оптическими свойствами АМС целесообразно провести путем сравнения скейлинговых характеристик их фурье-образов и спектров отражения и пропускания. При анализе скейлинга в рассчитываемых зависимостях использовалось представление о кластерной (массовой) фрактальной размерности [15]. Для оценки структурного соответствия в графических представлениях характеристик АМС помимо фрактальной параметризации проводился дополнительный корреляционный анализ.

Распределение амплитуды в фурье-образе светового поля рассчитывалось по формуле

$$A(q) = \sum_{n=0}^{N+1} \exp(-iqs x_n), \quad (1)$$

где  $q$  – нормированная пространственная частота,  $i = (-1)^{1/2}$ ,  $x_n$  – нормированная на минимальную толщину слоев координата  $n$ -й границы слоя,  $N$  – число элементов,  $s$  – масштабирующий множитель. При численном моделировании считалось, что  $q$  принимает целочисленные значения, а величина  $s = 5 \times 10^{-5}$  – для структуры Морса–Туэ,  $s = 2\pi \times 10^{-4}$  – для структуры Фибоначчи и  $s = 10^{-4}$  – для структур двойного периода и Рудин–Шапиро.

Если выполняется зависимость

$$\int_{Q_1}^Q |A(q)| dq \sim (Q - Q_1)^{D_1}, \quad (2)$$

то можно говорить, что фурье-спектр обладает фрактальностью с кластерной размерностью  $D_1$  в области, ограниченной пространственными частотами  $Q_1$  и  $Q$ . Для того чтобы отчетливее представить в спектральных зависимостях АМС положение и форму запрещенных зон, где коэффициент отражения по мощности  $R$  близок к единице, рассчитывалось его приведенное значение  $r = -\ln(1 - R)$ . Величина  $r$  использовалась при оценке кластерной размерности спектров отражения  $D_2$ :

$$\int_{\Omega_1}^{\Omega} r(\omega) d\omega \sim (\Omega - \Omega_1)^{D_2}. \quad (3)$$

Здесь  $\omega$  – частота плоской однородной волны, падающей на АМС;  $\Omega_1, \Omega$  – граничные частоты области, в которой оценивается скейлинг.

Исследуемые АМС изображены на рис. 1а–3а. На рис. 1б–3б приведены их фурье-образы по интенсивности  $I$  (для случая, когда  $A/B = 2/3$ ). На рис. 1в–3в представлены спектры отражения АМС с одинаковым значением фазовых набегов в слоях (АМС 1-го типа). Спектры отражения на рис. 1г–3г соответствуют АМС с одинаковой толщиной слоев (АМС 2-го типа). Предполагается, что волна распространяется вдоль оси  $x$ . Используемая для нормировки частота  $\omega_0$  в АМС 1-го типа соответствует фазовым набегам в слоях, равным  $\pi/2$ ; в случае систем 2-го типа при этой частоте в слоях  $A$  фазовый набег равен  $N_A \pi/2$ , а в слоях  $B - N_B \pi/2$ .

Важной особенностью АМС Морса–Туэ (рис. 1а), Фибоначчи (рис. 2а) и двойного периода (рис. 3а) является то, что они, не будучи в строгом смысле фракталами, обладают симметрией самоподобия. Действительно, если рассмотреть последовательность элементов АМС Морса–Туэ  $ABVABAABVABAABV...$ , то легко можно увидеть, что после попарного объединения структурных элементов согласно правилу  $AB \rightarrow A, BA \rightarrow B$  мы каждый раз будем приходиться к изначальной последовательности. Аналогично система двойного периода  $ABAABAABAABAABA...$  перейдет сама в себя, если осуществить похожую процедуру путем переобозначения  $AB \rightarrow A, AA \rightarrow B$ . Признаки самоподобия свойственны и АМС Фибоначчи. Чтобы в этом убедиться, обратим внимание на то, что порядковые номера элементов  $A$  задаются выражением

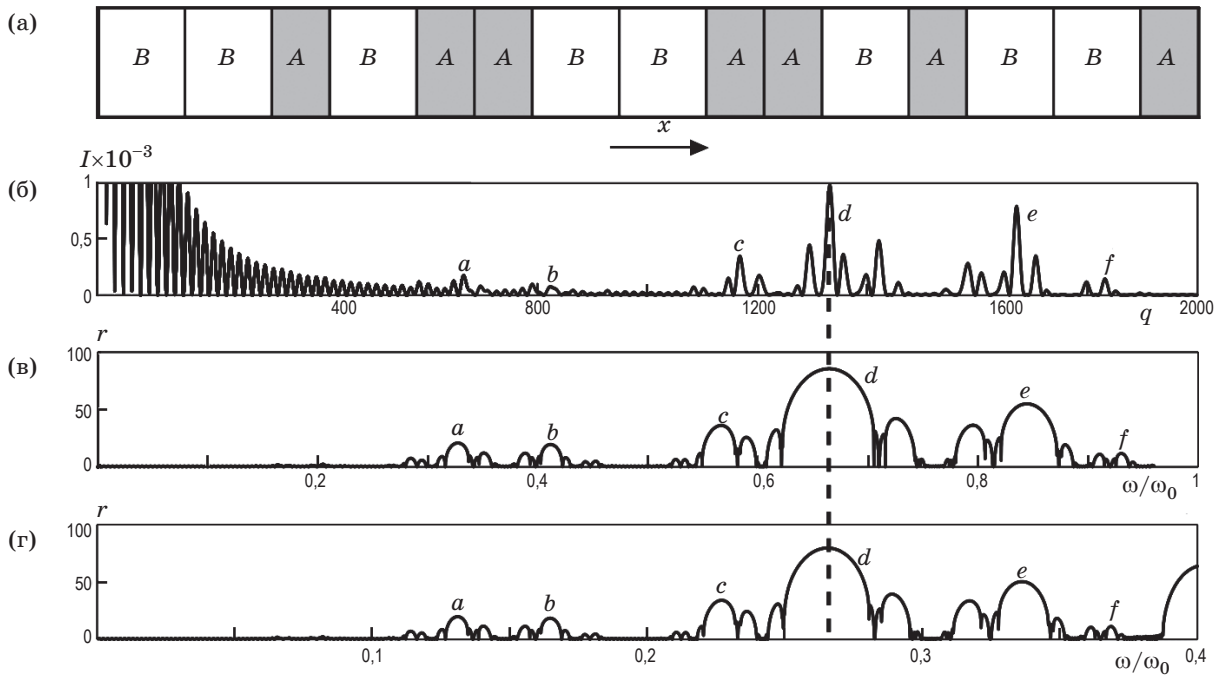


Рис. 1. АМС Морса–Туэ. а – структура АМС, б – фурье-образ АМС по интенсивности  $I$ , в – спектр отражения АМС 1-го типа, г – спектр отражения АМС 2-го типа (512 слоев).

$$n = \lfloor m\Phi \rfloor, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

а порядковые номера элементов  $B$  – выражением

$$k = \lfloor m\Phi^2 \rfloor, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Здесь  $\Phi = 1,618\dots$  – присутствующий в теории чисел Фибоначчи коэффициент золотого сечения [1], а под обозначением  $\lfloor x \rfloor$  понимается наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Видно, что при подстановке в последовательность (4)  $m\Phi$  вместо  $m$  она переходит в последовательность индексов  $m\Phi^2$ . Рассмотренные особенности проявления симметрии самоподобия в АМС позволяют утверждать, что структуры Морса–Туэ и двойного периода можно характеризовать коэффициентом скейлинга  $\zeta = 2$ , а структуру Фибоначчи – коэффициентом  $\zeta = \Phi$ .

Наличие симметрии самоподобия в рассматриваемых АМС (исключение составляет система Рудин–Шапиро) приводит к формированию в них дальних корреляционных связей, существование которых приводит к высокой степени устойчивости формы фурье-спектра в области с невысокими значениями пространственных частот. Так, изменение в два раза соотношения между величинами  $A$  и  $B$  в АМС

Фибоначчи не вызывает сколько-нибудь заметных изменений формы фурье-спектра АМС в области  $q \leq 950$ .

На структурное соответствие величины и положения основных максимумов спектральных характеристик указывают буквенные обозначения и пунктирные линии на рис. 1–3. Обнаруживается также, что эти максимумы образуют фракталоподобную структуру. Так, на рис. 1 структура максимумов вблизи пиков  $a, b$  подобна структуре максимумов вблизи пиков  $c, d, e, f$ . Коэффициент скейлинга, определяемый отношением размеров самоподобных областей (например  $de/ab$ ), оказывается равным внутреннему коэффициенту скейлинга всей аперiodической многослойной структуры ( $\zeta = 2$ ). На рис. 2 самоподобные области  $ad$  и  $dg$  имеют тот же коэффициент скейлинга. На рис. 3 подобным оказывается расположение максимумов в области пиков  $a$  и  $b, b$  и  $e, e$  и  $n$ . Эти пики вместе с максимумами  $c, d, f, g, h, i, j, k, l, m$  формируют фрактальную структуру, размеры отдельных самоподобных элементов которой на интервалах  $(a, b), (b, e), (e, n)$  соотносятся как коэффициент золотого сечения  $\Phi$ . Тем самым, коэффициент скейлинга в этом случае также равен внутреннему коэффициенту скейлинга системы Фибоначчи  $\zeta = \Phi$ .

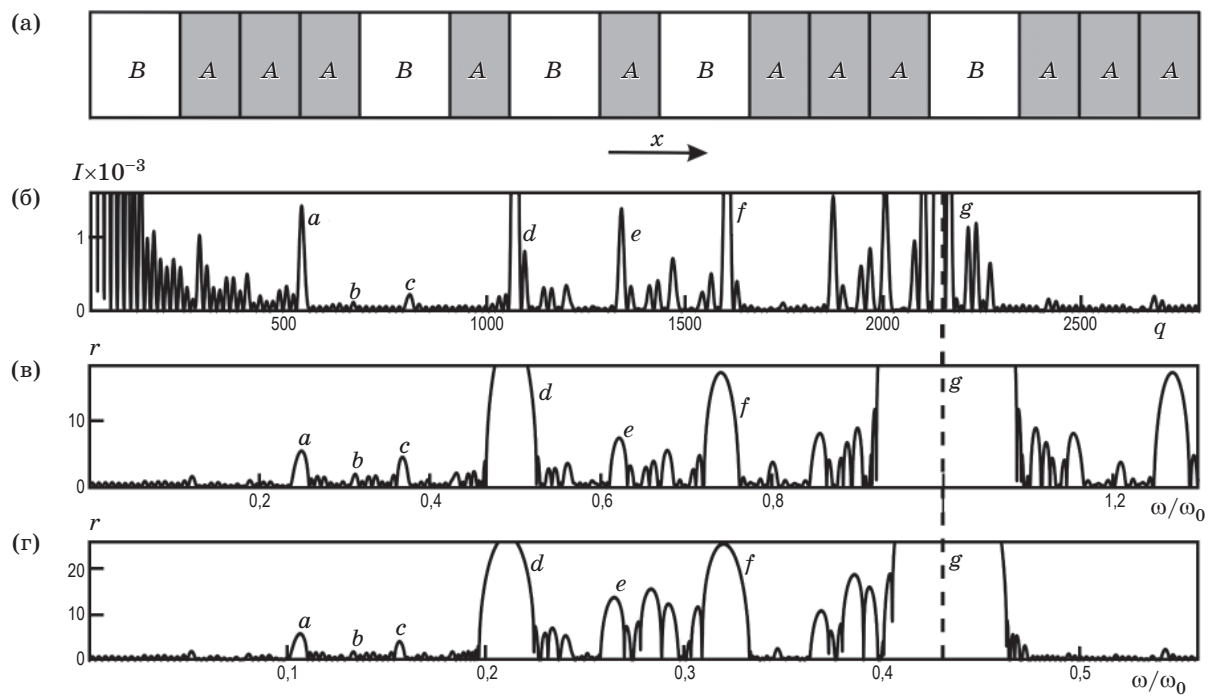


Рис. 2. АМС двойного периода. а, б, в, г – то же, что на рис. 1 (256 слоев).

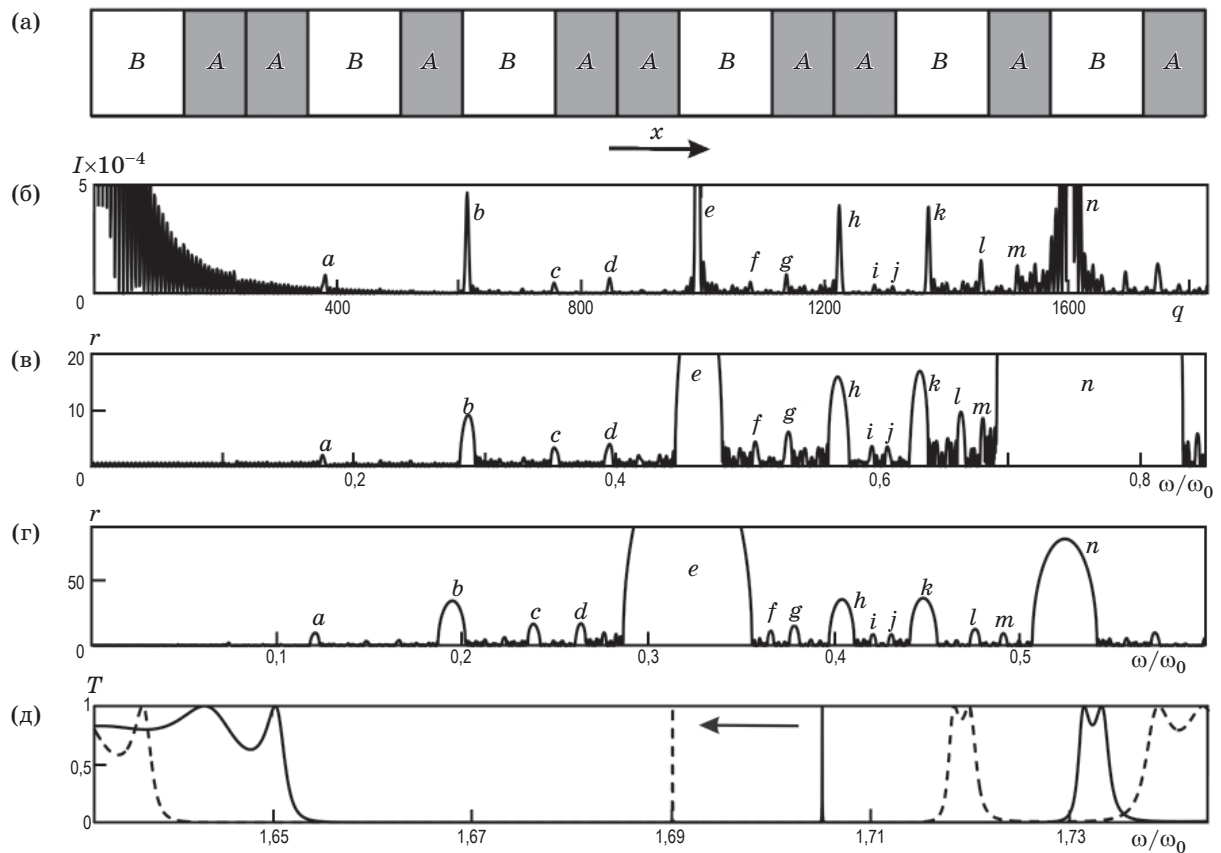


Рис. 3. АМС Фибоначчи. а, б, в, г – то же, что на рис. 1 (611 слоев), д – фрагмент спектра пропускания симметричной АМС Фибоначчи (68 слоев, сплошная линия –  $N_A = 2$ ,  $N_B = 3$ , пунктир –  $N_A = 2$ ,  $N_B = 3,05$ ).

Важным, ранее не отмечающимся в литературе свойством рассматриваемых многослойных структур, является то, что внутреннему коэффициенту скейлинга  $\zeta$  оказываются весьма близки значения кластерной фрактальной размерности, оцениваемой в области расположения самоподобных элементов. Для структур Морса–Туэ и Фибоначчи такое совпадение выполняется с точностью до 4%, а для структуры двойного периода – с точностью до 12%. Установленная закономерность не распространяется на систему Рудин–Шапиро, не обладающую внутренним самоподобием.

Обращает на себя внимание близость формы спектров отражения систем 1-го и 2-го типов. Это подтверждают оценки их коэффициентов корреляции для самоподобных областей. Так, рассчитанные при совмещении наиболее высоких пиков значения коэффициентов корреляции спектров отражения равны 0,95 (для системы Морса–Туэ), 0,91 (для системы двойного периода) и 0,9 (для системы Фибоначчи).

Несмотря на схожесть скейлинговых свойств АМС 1-го и 2-го типов, АМС 2-го типа обладают рядом специфических свойств. Так, запрещенные зоны в АМС второго типа примерно в два раза уже, чем в АМС 1-го типа при одинаковом количестве слоев. По сравнению с АМС 1-го типа АМС 2-го типа обнаруживают существенно более высокую чувстви-

тельность к изменению показателей преломления. Это свойство характеризует рис. 3д применительно к симметричному варианту системы Фибоначчи (в симметричной системе, начиная с некоторого номера  $J$ , положение слоев с различным показателем преломления является зеркальным отражением предыдущих). Из приведенного фрагмента спектра хорошо видно, что даже малое изменение показателя преломления (на 0,05) вызывает значительное смещение ( $15 \times 10^{-3} \omega / \omega_0$ ) сформировавшегося в данном спектральном интервале узкого контрастного пика пропускания. Ширина этого пика составляет всего лишь  $4 \times 10^{-5} \omega / \omega_0$ . Этот эффект может быть использован в оптических переключателях и быстродействующих логических ячейках, если слои  $A$  или  $B$  будут выполнены из нелинейного материала. Большое количество запрещенных зон в АМС позволяет придать таким устройствам многоканальный характер.

Таким образом, выполненный анализ позволил обнаружить общую закономерность, связывающую внутреннюю симметрию самоподобия АМС со скейлинговыми характеристиками их фурье-образов и спектров отражения (или пропускания). Этой закономерности подчиняются АМС как 1-го, так и 2-го типов. При этом некоторые свойства АМС 2-го типа могут представлять определенный практический интерес.

\* \* \* \* \*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Albuquerque E.L., Cottam M.G.* Theory of elementary excitations in quasiperiodic structures // *Physics Reports*. 2003. V. 376. P. 225–337.
2. *Бушув В.А., Манцызов Б.И., Прямыков А.Д.* Анализ эффективности генерации второй гармоники в одномерных фотонных кристаллах в зависимости от длины волны и толщины слоев // *Перспективные материалы*. 2001. № 6. С. 38–44.
3. *Makarava L.N., Nazarov M.M., Ozheredov I.A., Shkurinov A.P., Smirnov A.G., Zhukovsky S.V.* Fibonacci-like photonic structure for femtosecond pulse compression // *Physical Review E*. 2007. V. 75. P. 036609(1–7).
4. *Chiadini F., Fiumara V., Gallina I., Scaglione A.* Omnidirectional bandgap in Cantor dielectric multilayers // *Optics Communications*. 2009. V. 282. № 19. P. 4009–4013.
5. *Golmohammadi S., Rostami A.* Optical filters using optical multi-layer structures for optical communication systems // *Fiber and Integrated Optics*. 2010. V. 29. № 3. P. 209–224.
6. *Feng W.-g., He W.-z., Xue D.-p., Xu Y.-b., Wu X.* Reflection of soft x-rays and extreme ultraviolet from a metallic Fibonacci quasi-superlattice // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 1989. V. 1. № 43. P. 8241–8249.
7. *Сакун Е.А., Полюшкевич А.В., Харлашин П.А., Семенова О.В., Корец А.Я.* Разработка пористых структур на кремнии // *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. 2010. V. 3. № 4. С. 430–443.
8. *Angelsky O.V.* New feasibilities for characterizing rough surfaces by optical correlation Techniques // *Proc. SPIE*. 2002. V. 4607. P. 241–256.

9. *Стафеев С.К., Зинчик А.А.* Использование фрактальных масок для визуализации оптических неоднородностей прозрачных материалов // *Оптический журнал*. 2003. Т. 70. № 11. С. 49–51.
  10. *Axel F., Allouchet J.-P., Wen Z.-Y.* On certain properties of high-resolution X-ray diffraction spectra of finite-size generalized Rudin-Shapiro multilayer heterostructures // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 1992. V. 4. № 45. P. 8713–8728.
  11. *Грушина Н.В., Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю.* О Золотом сечении и самоподобных структурах в оптике // *Вестник Московского университета. Физика. Астрономия*. 2009. № 4. С. 47–51.
  12. *Esaki K., Sato M., Kohmoto M.* Wave propagation through Cantor-set media: Chaos, scaling, and fractal structures // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 79. № 5. P. 056226 – 1-13.
  13. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
  14. *Maciá E.* The role of aperiodic order in science and technology // *Rep. Prog. Phys.* 2006. V. 69. № 2. P. 397–441.
  15. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
-