

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД ГАБАРИТНОГО РАСЧЕТА ЦЕНТРИРОВАННЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2012 г. А. В. Иванов, канд. техн. наук; А. Б. Острун, аспирант

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: ivanov@mail.ifmo.ru; Alexostr@yandex.ru

Предложен усовершенствованный универсальный метод параметрического синтеза центрированных оптических систем в гауссовой области, основанный на использовании численного подхода к решению систем полилинейных модельных уравнений.

**Ключевые слова:** параметрический синтез, габаритный расчет, оптическая система, система полилинейных уравнений, универсальный численный метод.

Коды OCIS: 080.1753, 080.2468, 080.2720, 080.3620, 080.4035.

Поступила в редакцию 13.10.2011.

В работах [1, 2] показано, что в центрированной оптической системе координаты параксиальных лучей являются полилинейными функциями от оптических сил поверхностей, осевых расстояний между поверхностями, расстояний до предмета и входного зрачка. Другими словами, координаты связаны линейно с каждой из переменных при условии, что зафиксированы все остальные. Данное свойство позволяет путем элементарных преобразований привести подавляющее число уравнений, используемых при габаритном расчете оптической системы, к полилинейному виду

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_0 + \\
 & + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_i x_j + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n a_{ijk} x_i x_j x_k + \\
 & + \dots + a_{123\dots n} x_1 x_2 \dots x_n = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $f(\mathbf{X})$  – полилинейная функция  $n$  переменных;  $\mathbf{X}$  – вектор варьируемых параметров (оптических сил, осевых расстояний, расстояний до предмета и входного зрачка вдоль оптической оси)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{12}, \dots, a_{12\dots n}$  – коэффициенты полилинейной функции.

Представление в виде (1) позволяет, во-первых, полностью автоматизировать процесс составления систем уравнений для достижения избранных значений параксиальных характеристик и, во-вторых, построить универсальные алгоритмы их решения.

Одним из таких алгоритмов является численный метод, предложенный в [1, 2]. Суть его заключается в последовательном разбиении исходной области изменения переменных, заданной в виде гиперпараллелепипеда, на отдельные части. На каждом этапе разбиения выделяются те блоки, сквозь которые пройдут все поверхности  $f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ , определяемые системой уравнений, а заведомо не содержащие решения блоки отбрасываются. Индикатором прохождения поверхности  $f_i(\mathbf{X}) = 0$  через блок в виде гиперпараллелепипеда является переменная знака  $f_i(\mathbf{X})$  в любых двух его угловых точках, поскольку полилинейная функция не имеет экстремумов.

Описанный метод разбиения обладает глобальными свойствами, то есть позволяет найти все множество решений системы уравнений в пределах заданной области изменения переменных. В отличие от традиционных подходов, применяемых при габаритном расчете оптических систем, метод не ограничивает конструктора в количестве варьируемых параметров, так как не связан с каким-либо преобразованием исходных уравнений и реализуется в автоматическом режиме. Однако на практике его применение сдерживается тем фактором, что при большом числе переменных локализация корней является довольно трудоемкой задачей и требует значительного объема компьютерной памяти для хранения промежуточных результатов. Дело в том, что прохождение всех поверхностей  $f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$  через блок еще не гарантирует наличие в нем единой

точки пересечения указанных поверхностей. То есть, правило изменения знака функций  $f_i(\mathbf{X})$  в пределах гиперпараллелепипеда формулирует необходимое, но далеко не достаточное условие существования решения системы полилинейных уравнений. Это приводит к тому, что многие “пустые” блоки приходится запоминать и считать перспективными для поиска корней, так как через них проходят поверхности нулевого уровня всех многочленов.

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется произвести габаритный расчет фотообъектива с фокусным расстоянием  $f' = 500$  мм и задним отрезком 180 мм, который состоит из двух тонких компонентов, разделенных воздушным промежутком 150 мм. Обозначим через  $x_1, x_2$  неизвестные оптические силы компонентов. Ввиду наличия всего двух переменных, система уравнений для габаритного расчета в силу (1) получит вид

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0 \\ b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_{12}, b_0, b_1, b_2, b_{12}$  могут быть легко найдены путем интерполяции с помощью расчета выходных координат четырех параксиальных лучей. В итоге имеем

$$\begin{cases} -150x_1x_2 + x_1 + x_2 - 0,002 = 0 \\ -27000x_1x_2 + 330x_1 + 180x_2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для поиска решений зададим начальные промежутки изменения переменных:  $x_1 \in [0; 0,01]$ ;  $x_2 \in [-0,01; 0]$  (схема телеобъектива) и будем осуществлять последовательное сокращение исходной области поиска методом деления пополам по каждой из переменных. На рис. 1 показаны кривые линии, соответствующие уравнениям  $f_i(x_1, x_2) = 0, i = 1, 2$ ; заштрихованные области 1, 2, 3 соответствуют удаляемым блокам на первой, второй и третьей стадиях процесса деления начального квадрата; зоны с отсутствием штриховки охватывают остаточные площади с неопределенным расположением решения. Как следует из графического анализа, после выполнения трех этапов расчета для дальнейшего поиска выделяются 8 блоков со стороной в  $1/8$  часть длины начального интервала, из которых 7 являются пустыми, но требуют хранения координат и последующего разбиения.

С целью устранения описанного недостатка в статье предлагаются способы модернизации

исходного метода разбиения, позволяющие добиться ускорения процедуры решения. Эти способы основаны на преобразовании и расширении системы уравнений  $f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$  за счет использования линейных комбинаций функций  $f_i(\mathbf{X})$ . Впервые такой подход был предложен в [2].

Первоначально заметим, что накопление лишних блоков происходит из-за близкого прилегания поверхностей  $f_i(\mathbf{X})$  друг к другу. Если бы поверхности были ортогональны, то отбрасывание пустых гиперпараллелепипедов происходило бы значительно быстрее. Понятно, что ориентация нормалей в пространстве связана с видом функций  $f_i(\mathbf{X})$  и ее нельзя подправить нужным образом. Однако ничто не мешает построить ряд дополнительных к  $f_i(\mathbf{X}) = 0$  поверхностей, проходящих через точку решения и обладающих свойством полилинейности, с таким расчетом, чтобы они по возможности были ортогональны к исходным в интересующей нас области близости от решения. В частности, для этих целей можно использовать линейные комбинации  $f_i(\mathbf{X})$ , т. е. функции вида

$$f_i(\mathbf{X}) = \sum_j p_j f_j(\mathbf{X}). \quad (3)$$

Рассмотрим, например, как можно построить с помощью линейной комбинации  $f_1(\mathbf{X})$  и  $f_2(\mathbf{X})$  функцию  $f_3(\mathbf{X})$ , нормаль которой ортогональна нормали  $f_1(\mathbf{X})$  для выбранной точки пространства параметров  $\mathbf{X}^*$ . Пусть  $f_3(\mathbf{X}) = f_1(\mathbf{X}) + pf_2(\mathbf{X})$ . Тогда нормали функций  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  описываются векторами

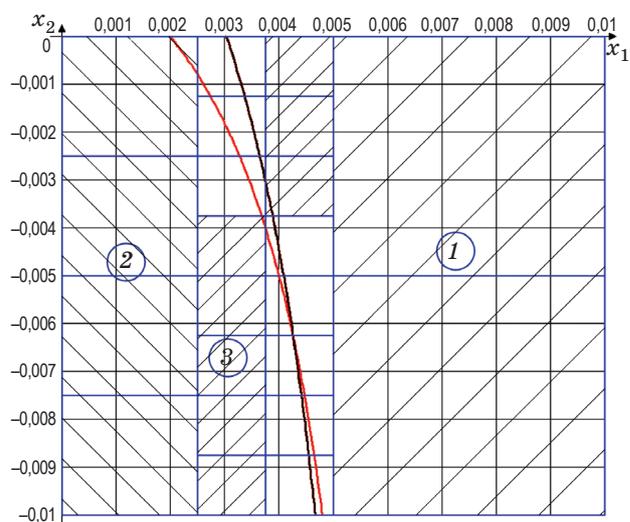


Рис. 1. Иллюстрация работы исходного метода решения.

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_n} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_1} + p \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_2} + p \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_n} + p \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что частные производные полилинейных функций вычисляются очень просто: для нахождения производной по некоторой переменной достаточно найти значение разности функции, вычисленной при единичном значении этой переменной, и свободного члена. Поэтому определение коэффициентов нормалей проблемы не представляет. Приравнявая скалярное произведение векторов (4) нулю, получим

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_i} \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_i} \right)}. \quad (5)$$

Важно подчеркнуть, что функция  $f_3(\mathbf{X})$  проходит через точку пересечения  $f_1(\mathbf{X})$  и  $f_2(\mathbf{X})$ , а ортогональность нормалей мы рассматриваем для некоторой точки  $\mathbf{X}^*$ , в общем случае не совпадающей с решением (положение решения заранее неизвестно). Скажем, в качестве такой точки можно взять вершину текущего гиперпараллелепипеда при разбиении. В таком случае на каждом этапе деления исходной области функция  $f_3(\mathbf{X})$  будет изменяться вследствие корректировки величины  $p$ .

Вернемся к рассмотренному выше примеру (2) с целью анализа эффективности ускоряющей процедуры добавления поверхностей, ортогональных к исходным. На рис. 2 для наглядности построены оригинальные кривые  $f_1(\mathbf{X}) = 0$ ,  $f_2(\mathbf{X}) = 0$  и ортогональные им линии, соответствующие уравнениям  $f_3(\mathbf{X}) = 0$ ,  $f_4(\mathbf{X}) = 0$  (функция  $f_4(\mathbf{X})$  вычисляется аналогично  $f_3(\mathbf{X})$ ), когда коэффициент  $p$  определен для точки с координатами  $(0,00375, -0,00625)$ . Как видно из рисунка, за счет применения дополнительных уравнений удается за три стадии процесса поиска решения оставить лишь два блока со стороной в  $1/8$  часть длины начального интервала.

Эффект от добавления дополнительных поверхностей можно существенно усилить, если строить их ортогонально по отношению к осям координат. В этом случае в малой окрестности точки решения теоретически не будет создаваться лишних блоков, подлежащих сохране-

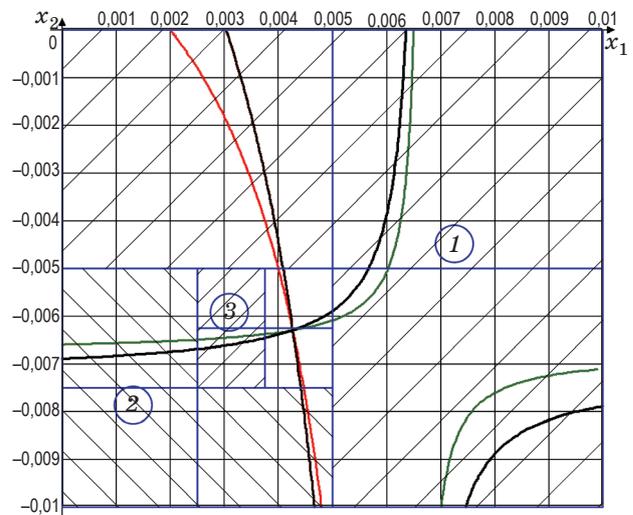


Рис. 2. Ускорение сходимости при использовании дополнительных поверхностей, ортогональных исходным.

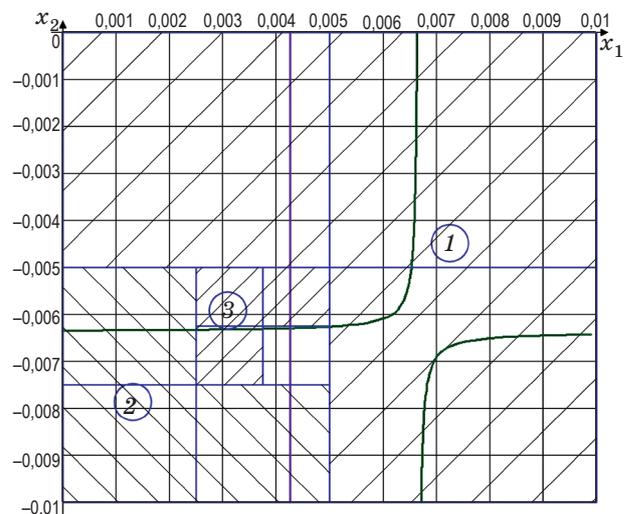


Рис. 3. Ускорение сходимости при использовании дополнительных поверхностей, ортогональных осям координат.

нию и последующего деления в ходе работы алгоритма.

Для нахождения коэффициента  $p$  поверхности  $f_3(\mathbf{X}) = f_1(\mathbf{X}) + pf_2(\mathbf{X}) = 0$ , ортогональной оси координат, достаточно приравнять нулю соответствующую составляющую нормали. Например, если поверхность  $f_3(\mathbf{X}) = 0$  перпендикулярна оси  $Ox_1$ , то

$$p = \frac{\frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_1}}. \quad (6)$$

На рис. 3 показано, как выглядят линия  $f_3(\mathbf{X}) = 0$ , ортогональная оси  $Ox_1$ , и линия  $f_4(\mathbf{X}) = 0$ , ортогональная оси  $Ox_2$  (вычислен-

ная аналогично первой), для точки расчета коэффициента (0,00375, -0,00625).

В отличие от предыдущего случая, за три стадии процесса поиска решения удается оставить лишь один блок со стороной в 1/8 часть длины начального интервала.

Описанный метод позволяет быстро осуществлять локализацию всех корней решаемой системы уравнений в процессе габаритного расчета оптической системы. В случае большой размерности задач и широкого диапазона изменения переменных весьма целесообразным является применение техники параллельных вычислений, поскольку исходный гиперпараллелепипед варьирования параметров может исследоваться по частям независимым образом.

Однако использование только одного алгоритма разбиения для получения решений с высокой степенью точности не является рациональным. Для уточнения корней существуют более быстрые методы, основанные не на интервальной, а точечной оценке их положения. К таким методам относится метод Ньютона [3]. Изложим его суть применительно к нашей задаче.

Обозначим через  $F(X)$  вектор полилинейных функций  $f_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ . Если известно начальное приближение  $X^{(0)}$  к решению системы уравнений  $F(X) = 0$ , то, разлагая функции в ряд Тейлора и оставляя первые члены разложения, имеем

$$F(X) = F(X^{(0)} + \Delta X) \approx F(X^{(0)}) + J(X^{(0)})\Delta X = 0, \quad (7)$$

где  $J(X^{(0)})$  – матрица Якоби функций  $F(X)$ ,  $\Delta X$  – вектор приращений параметров. Откуда получаем

$$\Delta X = -J^{-1}(X^{(0)})F(X^{(0)}). \quad (8)$$

Полученные значения приращений параметров уточняют начальное приближение к

решению, после чего вновь используется (8) и т. д.

Метод Ньютона удачно сочетается с методом разбиения. Первый обладает высокой скоростью сходимости, но требует наличия стартовой точки  $X^{(0)}$ , достаточно близкой к решению. При неудачном выборе  $X^{(0)}$ , он может расходиться или сходиться к другому корню, не лежащему в заданной области изменения переменных. Вторым методом обладает надежной сходимостью и позволяет выбрать в качестве  $X^{(0)}$  одну из вершин гиперпараллелепипеда, оставшихся после локализации корней с заданной степенью точности. Комбинация метода разбиения и метода Ньютона была апробирована при решении задачи синтеза панкратического объектива. Задача состоит в следующем.

Требуется рассчитать в гауссовой области панкратический объектив с механической компенсацией, имеющий перепад фокусного расстояния от 10 до 160 мм и задний фокальный отрезок 37 мм. Предмет располагается в бесконечности. Выберем за основу синтеза схему, содержащую 4 компонента, из которых два “внутренних” являются подвижными. Синтез будем осуществлять, исходя из заданного положения компонентов в крайних состояниях. Осевые расстояния, приведенные в таблице, заимствуем из работы [4].

Первоначально определим фокусные расстояния компонентов. С этой целью составим и приведем к полилинейной форме систему четырех уравнений, обеспечивающих требуемую оптическую силу и задний фокальный отрезок объектива в двух крайних состояниях. Универсальный алгоритм интерполяции позволяет провести генерацию уравнений в автоматическом режиме. Полученная система имеет вид

$$\begin{cases} -0,1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 15x_1x_2 - 107x_1x_3 - 175x_1x_4 - 92x_2x_3 - 160x_2x_4 - 68x_3x_4 + 1380x_1x_2x_3 + \\ + 2400x_1x_2x_4 + 7276x_1x_3x_4 + 6256x_2x_3x_4 - 93840x_1x_2x_3x_4 = 0, \\ -0,00625 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 97x_1x_2 - 116x_1x_3 - 175x_1x_4 - 19x_2x_3 - 78x_2x_4 - 59x_3x_4 + \\ + 1843x_1x_2x_3 + 7566x_1x_2x_4 + 6844x_1x_3x_4 + 1121x_2x_3x_4 - 108737x_1x_2x_3x_4 = 0, \\ 1 - 212x_1 - 197x_2 - 105x_3 - 37x_4 + 2955x_1x_2 + 11235x_1x_3 + 6475x_1x_4 + 9660x_2x_3 + 5920x_2x_4 + \\ + 2516x_3x_4 - 144900x_1x_2x_3 - 88800x_1x_2x_4 - 269212x_1x_3x_4 - 231472x_2x_3x_4 + 3472080x_1x_2x_3x_4 = 0, \\ 1 - 212x_1 - 115x_2 - 96x_3 - 37x_4 + 11155x_1x_2 + 11136x_1x_3 + 6475x_1x_4 + 1824x_2x_3 + 2886x_2x_4 + \\ + 2183x_3x_4 - 176928x_1x_2x_3 - 279942x_1x_2x_4 - 253228x_1x_3x_4 - 41477x_2x_3x_4 + 4023269x_1x_2x_3x_4 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где в качестве неизвестных выступают оптические силы компонентов. Поиск корней осуществим в

промежутке изменения переменных от -0,3 до 0,3, с запасом, охватывающим все разумные решения.

Исходные осевые расстояния между компонентами для синтеза вариообъектива

$f'$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
10	15	92	68
160	97	19	59

Для локализации корней системы уравнений (9) было использовано 14 стадий усовершенствованного метода разбиения. В итоге

максимальные интервалы неопределенности переменных для трех выделенных областей решений составили приблизительно  $1,5 \times 10^{-4}$ . Затем корни были уточнены с помощью трех итераций метода Ньютона. Суммарное время расчета объектива составило около одной секунды на компьютере с процессором *Intel® Core™ 2Duo CPU E4500 @2.2 GHz*, память (*RAM*) 2 Гб. В результате получены следующие решения

- 
- (1)  $x_1 = 0,00813761$ ,  $x_2 = -0,0487795$ ,  $x_3 = 0,00985872$ ,  $x_4 = 0,0255596$ .
  - (2)  $x_1 = 0,00829669$ ,  $x_2 = -0,00135012$ ,  $x_3 = -0,263686$ ,  $x_4 = 0,0408545$ .
  - (3)  $x_1 = 0,0123709$ ,  $x_2 = 0,0569874$ ,  $x_3 = 0,0393476$ ,  $x_4 = 0,0599906$ ,

правильность которых легко удостоверяется обратной подстановкой.

Таким образом, предложенный в статье усовершенствованный универсальный метод пара-

метрического синтеза является эффективным инструментом автоматизированного габаритного расчета центрированных оптических систем, широко используемых на практике.

\* \* \* \* \*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanov A.V.* Generalized method for first-order lens layout // Proc. SPIE. 1999. V. 3780. P. 199–206.
2. *Иванов А.В.* Универсальные методы решения модельных уравнений при габаритном расчете оптических систем // Оптический журнал. 2007. Т. 74. В. 5. С. 302–306.
3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
4. *Kryszczyński T.* Analysis of four-component zoom systems with mechanical compensation. – Warsaw: SPIE Polish chapter, 1996. 84 p.