УДК 535.317; 681.7

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. А. Шехонин, канд. техн. наук; **А. В. Иванов**, канд. техн. наук; **Л. И. Пржевалинский**; **Т. И. Жукова**

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: shehonin@aco.ifmo.ru

Рассматривается метод расчета отклонений координат луча на произвольной поверхности оптической системы при возмущении конструктивных параметров предшествующих поверхностей. Метод не накладывает ограничений на класс симметрии системы.

Ключевые слова: *конструирование оптических систем, анализ чувствительности, аберрации, аналитический метод.*

Коды OCIS: 080.1753, 080.2208, 080.2720, 080.3620, 080.4035, 220.1000, 220.3620.

Поступила в редакцию 27.10.2011.

Анализ влияния изменений конструктивных параметров на характеристики оптических систем является одной из важнейших вычислительных процедур. Его результаты в виде матрицы влияния параметров или матрицы чувствительности характеристик используются в процессе параметрического синтеза и оптимизации, при назначении допусков, при решении задач оптимальной юстировки и комплектации.

Распространенным способом получения матрицы влияния является разностный метод численного дифференцирования, при котором проводится многократное повторение процедуры анализа характеристик при последовательном возмущении значений параметров. Такой способ универсален и объектно независим. Более того, он становится незаменимым, если исследованию подлежат характеристики высшего уровня анализа изображения, типа функции рассеяния точки, функции концентрации энергии или оптической передаточной функции.

Недостатком разностного метода является высокая трудоемкость. Значительные затраты времени на численную оценку влияния параметров приводят к тому, что процедуры локальной оптимизации сложных, особенно многоконфигурационных оптических систем могут выполняться достаточно долго, несмотря на быстродействие современных компьютеров. Еще сильнее данный недостаток проявляется при глобальной оптимизации, которая входит в практику проектирования оптики.

При построении матрицы влияния параметров время расчета складывается из затрат на прогонку действительных лучей и затрат на вычисление характеристик, при определении которых используются результаты расчета лучей. Вторая составляющая временного ресурса будет высокой в том случае, когда контролируются уже упомянутые характеристики высшего уровня. Однако их использование рационально лишь на заключительной стадии процесса проектирования. При решении задач параметрического синтеза и глобальной оптимизации их применение нецелесообразно из-за высокой степени нелинейности и способности к порождению множества локальных минимумов, не представляющих практического интереса.

Отсюда можно сделать вывод о том, что наиболее эффективным путем снижения трудоемкости параметрического синтеза и глобальной оптимизации оптических систем является снижение временных затрат, связанных с определением влияния параметров на аберрационные функции, получаемые с помощью рациональных выражений от выходных координат действительных лучей. Реализация указанного пути состоит в применении методов аналитического дифференцирования характеристик оптических систем по конструктивным параметрам. Описанные в литературе методы такого дифференцирования не получили широкого распространения из-за своих недостатков.

Первая группа методов, основанных на дифференцировании формул расчета хода действительного луча, в разных модификациях описана в работах [1–3]. Условно назовем эту группу методом Д. Федера. В предлагаемых вариантах метод, во-первых, ориентирован на оптические системы с радиальной симметрией, во-вторых, приводит к весьма громоздким выражениям.

Второй метод, назовем его методом Конради, развит в работах [4, 5]. Он основан на принципе Ферма и дает простые выражения для производной оптической длины хода луча. Главным его недостатком является пренебрежение дополнительным членом в изменении волновой аберрации, обусловленным изменением выходных зрачковых координат, поэтому его применение возможно лишь в случае тонких систем со зрачками, совпадающими с системой.

В настоящей статье рассмотрен способ вычисления дифференциалов линейных и угловых координат луча, а также аберрационной функции при возмущении параметров системы в наиболее общем случае без каких-либо ограничений на класс ее симметрии. Дифференциалы поперечных аберраций и аберрационной функции определим как разности дифференциалов координат текущего и главного луча пучка. Будем предполагать, что оптические поверхности являются гладкими, а оптические среды – изотропными и однородными.

Вывод формул начнем с рассмотрения влияния параметров формы оптической поверхности. С этой целью воспользуемся универсальным уравнением поверхности [6] вида

$$f(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} - 0{,}5\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{s} - Q(\mathbf{s}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{s} = (x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}}$ – вектор координат точки поверхности, "T" – знак транспонирования, $\mathbf{k}$ – орт оси z декартовой системы координат $Oxyz$, $\mathbf{R}$ – диагональная матрица с элементами ρ_x, ρ_y, ρ_z на главной диагонали, определяющая составляющую второго порядка, $Q(\mathbf{s})$ – добавочный член, описывающий деформацию высшего порядка. Параметры ρ_x и ρ_y равны значениям кривизны поверхности при вершине в точке $\mathbf{s} = 0$, а величина ρ_z равна $\rho_x(1 - e_x^2)$ или $\rho_y(1 - e_y^2)$, где e_x и e_y – эксцентриситеты сечений поверхности плоскостями Oxz и Oyz.

Заметим, что при отсутствии у поверхности симметрии вращения относительно оси z матрица $\mathbf{R}$ принимает диагональный вид только при условии ориентации осей системы координат x и y вдоль главных сечений поверхности. Будем полагать, что это условие выполнено, а в произвольное положение поверхность, описанная таким способом, устанавливается внешним поворотом ее системы координат вокруг оси, совпадающей с осью z.

Конкретный вид составляющей высших порядков Q зависит от свойств поверхности. Для неглубоких поверхностей, у которых z – однозначная функция координат x и y, деформацию высших порядков удобно описать в виде

$$Q(\omega_x, \omega_y) = \Sigma_k \alpha_k B_k(\omega_x, \omega_y), \qquad (2)$$

где $\omega_x = x/x_{\max}$, $\omega_y = y/y_{\max}$ – относительные (канонические) координаты точки на поверхности, нормированные к соответствующим габаритам, причем функции базиса B_k выбираются так, что $B_k(1,1) = 1$. В этом случае значения коэффициентов деформации α_k равны составляющим деформации соответствующих порядков на краю световых габаритов.

Для глубоких поверхностей, у которых z – неоднозначная функция координат x и y, деформацию высших порядков удобно описать в виде

$$Q(\omega_x, \omega_z) = \Sigma_k \alpha_k B_k(\omega_x, \omega_z) \qquad (3а)$$

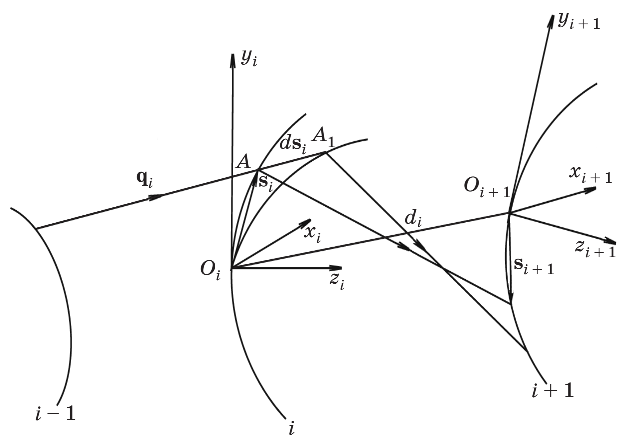
или

$$Q(\omega_y, \omega_z) = \Sigma_k \alpha_k B_k(\omega_y, \omega_z), \qquad (3б)$$

где $\omega_z = z/z_{\max}$, а $z_{\max}$ – световая "стрелка" поверхности.

Действительный луч характеризуется в процессе расчета двумя векторами – вектором $\mathbf{s} = (x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}}$ линейных координат точки x, y, z на поверхности и единичным ортом $\mathbf{q} = (X, Y, Z)^{\mathrm{T}}$ угловых координат X, Y, Z. В зависимости от пространства, в котором определяются параметры хода луча, векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{q}$ определены в системах координат предмета, изображения или текущей поверхности.

Обратимся к рисунку, на котором изображен ход луча между $(i - 1)$-й и $(i + 1)$-й поверхностью. В номинальном положении точка А встречи луча с i-й поверхностью определяется вектором $\mathbf{s}_i$, а направление луча – его ортом $\mathbf{q}_i$. Отметим, что здесь вектор $\mathbf{s}_i$ и орт $\mathbf{q}_i$ определены в системе координат i-й поверхности. Предположим, что один из внутренних параметров i-й поверхности изменяется



Возмущение луча при изменении параметра формы поверхности.

на малую величину. Следуя [6], обозначим через a и da соответственно номинальное значение параметра и его приращение. Индексы i здесь и далее временно будем опускать. При возмущении параметра поверхности точка встречи, оставаясь на луче, смещается в положение A_1, а вектор $\mathbf{s}$ изменяется на величину $d\mathbf{s}$.

Запишем уравнение возмущенной поверхности в виде

$$f(\mathbf{s}+d\mathbf{s},\, a+da)=0. \tag{4}$$

С точностью до дифференциалов выше первого порядка имеем

$$f(\mathbf{s}, a)+(\partial f/\partial \mathbf{s})^{\mathrm{T}} d\mathbf{s}+(\partial f/\partial a)da=0. \tag{5}$$

Далее при выполнении вычислений будем оперировать не с дифференциалами характеристик, а с их линейными приращениями. Величина приращения δa параметра в этом случае может быть любой и определяет лишь нормировку приращения характеристики δf. Аналогичный прием используется при расчете нулевых лучей.

Учитывая уравнение поверхности $f(\mathbf{s}, a) = 0$, из выражения (5) получаем

$$\delta\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}=-\delta f, \tag{6}$$

где $\delta f = (\partial f/\partial a)\delta a$ – приращение функции $f(\mathbf{s}, a)$ при изменении параметра a на величину δa и неизменном векторе $\mathbf{s}$, $(\partial f/\partial a)$ – частная производная $f(\mathbf{s}, a)$ по параметру a, $\delta\mathbf{s}$ – приращение вектора $\mathbf{s}$.

Вектор $\mathbf{g} = (\partial f/\partial \mathbf{s})$, элементами которого являются частные производные $f(\mathbf{s}, a)$ по декартовым координатам, представляет собой вектор нормали к поверхности в точке $\mathbf{s}$. При выбранной нормировке уравнения (1) длина нормали $\mathbf{g}$ для сферической поверхности равна единице. Для асферических поверхностей модуль вектора нормали отличен от единицы.

Точка встречи смещается по лучу, поэтому приращение $\delta\mathbf{s}$ вектора $\mathbf{s}$ можно представить как

$$\delta\mathbf{s}=\delta L\mathbf{q}, \tag{7}$$

где δL – приращение расстояния L от $(i-1)$-й до i-й поверхности, измеренное вдоль луча. Подставляя (7) в равенство (6), получаем

$$\delta L\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}=-\delta f,$$

или

$$\delta L=-\delta f/(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}). \tag{8}$$

Скалярное произведение $\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = c$ представляет собой произведение косинуса угла падения луча на длину нормали. Эта величина вычисляется в процессе определения точки встречи луча с i-й поверхностью.

Формула для вычисления δf получается дифференцированием уравнения (1) по параметру a

$$\delta f=-0{,}5(\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{R}\mathbf{s}+\delta Q), \tag{9}$$

где

$$\delta Q=(\partial Q/\partial a)\delta a,\ \delta\mathbf{R}=(\partial \mathbf{R}/\partial a)\delta a.$$

Формулы для вычисления элементов матрицы $\delta\mathbf{R}$ и приращения членов высшего порядка δQ зависят от конкретного вида поверхности, легко могут быть получены дифференцированием выражений (2), (3) и здесь не приводятся из-за соображений экономии места.

В результате возмущения параметра поверхности изменяется не только вектор $\mathbf{s}$, но и орт $\mathbf{q}'$ преломленного (отраженного) луча.

Формула, определяющая соотношение между ортами падающего и преломленного (отраженного) луча, имеет вид [6]

$$\mathbf{q}'=\mu\mathbf{q}+\Gamma\mathbf{g}, \tag{10}$$

где $\mu = n/n'$, Γ – скалярная величина, определяемая в процессе расчета основного луча. Дифференцируя выражение (10) и учитывая, что орт $\mathbf{q}$ не изменяется при возмущении параметра поверхности, получим

$$\delta\mathbf{q}'=\delta\Gamma\mathbf{g}+\Gamma\delta\mathbf{g}. \tag{11}$$

Из условия сохранения единичной длины ортов основного $\mathbf{q}'$ и возмущенного луча $\mathbf{q}' + \delta\mathbf{q}'$

легко доказать [6] свойство ортогональности векторов $\mathbf{q}'$ и $\delta\mathbf{q}'$

$$\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{q}' = \delta\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\mathbf{q}' = 0. \qquad (12)$$

Умножим слева обе части равенства (11) скалярно на орт $\mathbf{q}'$

$$\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{q}' = \delta\Gamma\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\mathbf{g} + \Gamma\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{g}.$$

Величина $c' = \mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\mathbf{g}$ равна произведению длины нормали и косинуса угла преломления луча в точке A. Эта величина вычисляется в процессе расчета хода основного луча через поверхность. Учитывая соотношение (12), получаем выражение для вычисления приращения $\delta\Gamma$

$$\delta\Gamma = -\Gamma(\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{g})/c'. \qquad (13)$$

Неизвестным элементом выражения (13) является приращение вектора нормали. В общем случае уравнения (1) вектор нормали определяется формулой

$$\mathbf{g} = \mathbf{k} - \mathbf{R}\mathbf{s} - \nabla Q, \qquad (14)$$

где ∇Q – вектор частных производных $Q(\mathbf{s})$ по декартовым координатам x, y, z.

Приращение вектора нормали $\delta\mathbf{g}_S$ при изменении вектора $\mathbf{s}$ определяется матрицей первых производных проекций нормали по координатам x, y, z или матрицей $\mathbf{H}$ вторых частных производных функции $f(\mathbf{s}, a)$

$$\delta\mathbf{g}_S = \mathbf{H}\delta\mathbf{s}. \qquad (15)$$

В частном случае поверхностей второго порядка матрица $\mathbf{H} = -\mathbf{R}$, т. е. представляет собой диагональную матрицу с элементами $-\rho_x$, $-\rho_y$ и $-\rho_z$ на главной диагонали. В общем случае она определяется выражением

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{R} + \nabla\nabla^{\mathrm{T}}Q(\mathbf{s})), \qquad (16)$$

где $\nabla\nabla^{\mathrm{T}}Q(\mathbf{s})$ – симметрическая матрица вторых частных производных функции $Q(\mathbf{s})$, элементы которой рассчитываются в процессе определения точки встречи луча с поверхностью, если в уравнении присутствует член $Q(\mathbf{s})$.

Однако приращения элементов вектора нормали, рассчитанные по формулам (15), являются неполными. Дополнительное изменение проекций нормали определяется ее частными производными по конструктивным параметрам. Обозначим приращение вектора нормали, вызванное непосредственно изменением параметра, через $\delta\mathbf{g}_a$. Тогда полное приращение $\delta\mathbf{g}_\Sigma$ определяется суммой

$$\delta\mathbf{g}_\Sigma = \delta\mathbf{g}_S + \delta\mathbf{g}_a. \qquad (17)$$

Элементы вектора $\delta\mathbf{g}_a$ определяются с помощью дифференцирования формулы (14)

$$\delta\mathbf{g}_a = -\delta\mathbf{R}\mathbf{s} - \delta(\nabla Q), \qquad (18)$$

где $\delta(\nabla Q) = (\partial(\nabla Q)/\partial a)\delta a$; $(\partial(\nabla Q)/\partial a)$ – вектор частных производных ∇Q по варьируемому параметру a.

Объединяя выражения (6)–(18) в единую последовательность, можно записать общий порядок вычислений векторов $\delta\mathbf{s}$ и $\delta\mathbf{q}'$.

Вычисление $\delta\mathbf{R}$ и δQ:	Вычисление $\delta(\nabla\mathbf{Q})$:	
$\delta f = -0{,}5(\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{R}\mathbf{s} + \delta Q)$,	$\delta\mathbf{g}_a = -\delta\mathbf{R}\mathbf{s} - \delta(\nabla\mathbf{Q})$,	
$\delta L = -\delta f/c$,	$\delta\mathbf{g}_\Sigma = \delta\mathbf{g}_S + \delta\mathbf{g}_a$,	(19)
$\delta\mathbf{s} = \delta L\mathbf{q}$,	$\delta\Gamma = -\Gamma(\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{g}_\Sigma)/c'$,	
$\delta\mathbf{g}_S = \mathbf{H}\delta\mathbf{s}$.	$\delta\mathbf{q}' = \delta\Gamma\mathbf{g} + \Gamma\delta\mathbf{g}_\Sigma$.	

Определим теперь вектор возмущения линейных и угловых координат луча на следующей, $(i + 1)$-й поверхности, вызванный возмущением параметра i-й поверхности, пользуясь аппаратом расчета дифференциалов действительного луча [7]. Последовательность действий опишем с минимальными комментариями в форме алгоритма, удобного для программирования, понимая знак равенства как оператор присваивания и полагая на входе $\delta\mathbf{q} = \delta\mathbf{q}'$:

– переход в систему координат $(i+1)$-й поверхности

$$\delta\mathbf{s} = \mathbf{\Phi}\delta\mathbf{s} \qquad (20а)$$

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\delta\mathbf{q},$$

где $\mathbf{\Phi}$ – ортогональная матрица поворота системы координат $(i + 1)$-й поверхности в системе координат i-й поверхности;

– определение линейного дифференциала возмущения на $(i + 1)$-й поверхности с учетом того, что к этому моменту операция нахождения точки встречи луча с $(i + 1)$-й поверхностью уже выполнена: определены вектор линейных координат $\mathbf{s}$, расстояние L, вектор нормали $\mathbf{g}$, матрица $\mathbf{H}$, скаляры c и c', относящиеся к $(i + 1)$-й поверхности

$$\delta L = -\mathbf{g}^{\mathrm{T}}(\delta\mathbf{s} + L\delta\mathbf{q})/c, \qquad (20б)$$

$$\delta\mathbf{s} = (\delta\mathbf{s} + L\delta\mathbf{q}) + \mathbf{q}\delta L;$$

– определение углового дифференциала возмущения после преломления на $(i + 1)$-й поверхности с учетом того, что к этому моменту операция нахождения преломленного луча уже выполнена, т. е. определены орт преломленного луча $\mathbf{q}'$ и скаляр Γ

$$\delta\mathbf{g} = \mathbf{H}\delta\mathbf{s},$$
$$\delta\Gamma = -\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}(\delta\mathbf{q}\mu + \delta\mathbf{g}\Gamma)/c', \tag{20в}$$
$$\delta\mathbf{q} = (\delta\mathbf{q}\mu + \delta\mathbf{g}\Gamma) + \mathbf{g}\delta\Gamma.$$

Таким образом, мы рассчитали векторы возмущения линейных $\delta\mathbf{s}$ и угловых $\delta\mathbf{q}$ координат луча на $(i + 1)$-й поверхности, вызванные возмущением параметра формы i-й поверхности.

Наметим ход дальнейших действий, обеспечивающих нахождение векторов возмущения на любой последующей поверхности. Один из способов [2, 3] заключается в последовательном применении формул (20) для всех последующих поверхностей вплоть до поверхности изображения или выходной сферы в зависимости от типа изображения, ближнего или дальнего. Такой способ представляется неэкономичным, поскольку вычисления следует выполнить для каждого возмущаемого параметра системы. Как показано ниже, существует другой, более рациональный способ, обладающий меньшей трудоемкостью.

В соответствии с используемой внутренней функциональной моделью оптической системы [6], при вычислении аберрационной функции, являющейся аналогом волновой аберрации, помимо основного луча рассчитываются четыре дифференциала луча: два "предметных" и два "зрачковых". Каждый дифференциал, как и луч, описывается тремя линейными $d\mathbf{s}$ и тремя угловыми $d\mathbf{q}$ координатами.

Как известно [8], множество лучей в пространстве четырехмерно.

Отбросим z – проекции в векторах дифференциалов $d\mathbf{s}$ и $d\mathbf{q}$ и объединим оставшиеся линейные и угловые координаты в один вектор $d\mathbf{v}$

$$d\mathbf{v} = (dx, dy, dX, dY)^{\mathrm{T}}. \tag{21}$$

Отброшенные проекции всегда можно восстановить, используя свойство парной ортогональности орта луча и его дифференциала, а также дифференциала линейных координат и нормали к поверхности. На основании фундаментальных законов геометрической оптики можно утверждать, что любому дифференциалу $d\mathbf{v}^i$, относящемуся к i-й поверхности, можно поставить в соответствие дифференциал $d\mathbf{v}^j$, относящийся к j-й поверхности.

Действие оптической системы в окрестности любого действительного луча описывается некоторым оператором $\mathbf{G}^{ij}$

$$d\mathbf{v}^j = \mathbf{G}^{ij} d\mathbf{v}^i. \tag{22}$$

В регулярных оптических системах всегда существует окрестность, в которой оператор $\mathbf{G}^{ij}$ линеен. По аналогии с параксиальной областью осесимметричных систем, эта окрестность называется гауссовой областью вокруг произвольного луча [9].

Линейный оператор типа (22) описывается матричным умножением, следовательно, характеристики оптической системы в гауссовой области определяются квадратной матрицей $\mathbf{G}^{ij}$ четвертого порядка

$$d\mathbf{v}^j = \mathbf{G}^{ij} d\mathbf{v}^i. \tag{23}$$

Для определенности матрицы положим, что $j \geq i$.

Способ вычисления матрицы $\mathbf{G}^{ij}$ будет описан ниже, а сейчас будем считать, что она определена для части системы с номинальными значениями конструктивных параметров. Используем в качестве линейных компонентов вектора $\delta\mathbf{v}^i$ первые два элемента вектора возмущения линейных координат $\delta\mathbf{s}$, а в качестве угловых – первые два элемента вектора возмущения угловых координат $\delta\mathbf{q}$, расчет которых производится с помощью формул (20). Будем считать, что индекс поверхности i теперь соответствует номеру невозмущенной поверхности, а возмущаемый параметр принадлежит $(i - 1)$-й поверхности. Тогда по формуле (23) мы можем определить вектор возмущения координат на j-й поверхности, вызванный возмущением параметра $(i - 1)$-й поверхности

$$\delta\mathbf{v}^{ij} = \mathbf{G}^{ij}\delta\mathbf{v}^i. \tag{24}$$

В частном случае мы можем под j-й поверхностью понимать поверхность изображения или поверхность выходной сферы.

Таким образом, задача переноса возмущения координат луча, вызванного изменением некого параметра, на любую последующую поверхность может быть решена, если известна матрица переноса $\mathbf{G}^{ij}$.

Рассмотрим способ определения матрицы $\mathbf{G}^{ij}$, а для начала рассмотрим некоторые ее свойства.

Преобразование (24) должно подчиняться закону Малюса–Дюпена, который, как показал Герцбергер [8], есть частный случай общего требования инвариантности оптического дифференциала

$$n_j((d\mathbf{s}_{uk}^{\mathrm{T}} d\mathbf{q}_{um}) - (d\mathbf{s}_{um}^{\mathrm{T}} d\mathbf{q}_{uk}))_j = \\ = n_i((d\mathbf{s}_{uk}^{\mathrm{T}} d\mathbf{q}_{um}) - (d\mathbf{s}_{um}^{\mathrm{T}} d\mathbf{q}_{uk}))_i, \tag{25}$$

где i, j – номера сред, uk и ul – всевозможные параметры, определяющие множество лучей, причем $k = 1, ...4$; $m = 1, ...4$; $d\mathbf{s}_{uk}$, $d\mathbf{q}_{um}$, $d\mathbf{s}_{um}$, $d\mathbf{q}_{uk}$ – дифференциалы векторов по параметрам uk, um.

В нашем случае параметрами, определяющими множество лучей, являются сами компоненты векторов $d\mathbf{v}$

$$n_j((d\mathbf{h}_k^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{\alpha}_l) - (d\mathbf{h}_l^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{\alpha}_k))_j = \\ = n_i((d\mathbf{h}_k^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{\alpha}_l) - (d\mathbf{h}_l^{\mathrm{T}} d\boldsymbol{\alpha}_k))_i, \tag{26}$$

где

$$d\mathbf{h} = (dx,\, dy)^{\mathrm{T}};\ \ d\boldsymbol{\alpha} = (dX,\, dY)^{\mathrm{T}}.$$

Можно показать [9], что инвариант (26) определяет четыре условия, которым должна удовлетворять матрица $\mathbf{G}$. Указанные условия можно записать в виде равенств, если разбить матрацу $\mathbf{G}$ на четыре подматрицы размерностью 2×2

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix}: \tag{27}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{G}_{11}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{21}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{11} = 0, \\ \mathbf{G}_{11}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{12} = n_i/n_j\mathbf{I}, \\ \mathbf{G}_{12}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{22}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{11} = -n_i/n_j\mathbf{I}, \\ \mathbf{G}_{12}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{22}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{12} = 0, \end{gathered} \tag{28}$$

где через $\mathbf{I}$ обозначена единичная матрица. Условия (28), описывающие оптические свойства матрицы $\mathbf{G}$, позволяют легко, без использования сложных методов линейной алгебры, определить матрицу обратного преобразования $\mathbf{G}^{-1}$

$$\mathbf{G}^{-1} = n_j/n_i \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{22}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{G}_{12}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{G}_{21}^{\mathrm{T}} & \mathbf{G}_{11}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Построить матрицу $\mathbf{G}$ можно по результатам расчета одновременно с основным лучом четырех его дифференциалов. Пусть $d\mathbf{v}_1^0, d\mathbf{v}_2^0, d\mathbf{v}_3^0, d\mathbf{v}_4^0$ – четыре линейно-независимых четырехмерных вектора дифференциалов на нулевой поверхности оптической системы. В зависимости от типа предмета, ближнего или дальнего – это или поверхность предмета, или поверхность входной сферы соответственно.

В результате расчета на i-й поверхности мы получим четыре вектора дифференциалов $d\mathbf{v}_1^i, d\mathbf{v}_2^i, d\mathbf{v}_3^i, d\mathbf{v}_4^i$. Тогда из (24) получим

$$\mathbf{G}^{0,\,i} = (d\mathbf{v}_1^i | d\mathbf{v}_2^i | d\mathbf{v}_3^i | d\mathbf{v}_4^i)(d\mathbf{v}_1^0 | d\mathbf{v}_2^0 | d\mathbf{v}_3^0 | d\mathbf{v}_4^0)^{-1}.$$

Выберем входные дифференциалы $d\mathbf{v}^0$ так, чтобы матрица $(d\mathbf{v}_1^0 | d\mathbf{v}_2^0 | d\mathbf{v}_3^0 | d\mathbf{v}_4^0)$ была единичной. Тогда

$$\mathbf{G}^{0,\,i} = (d\mathbf{v}_1^i | d\mathbf{v}_2^i | d\mathbf{v}_3^i | d\mathbf{v}_4^i).$$

Продолжая расчет луча до j-й поверхности, получим матрицу $\mathbf{G}^{0,\,j}$

$$\mathbf{G}^{0,\,j} = (d\mathbf{v}_1^j | d\mathbf{v}_2^j | d\mathbf{v}_3^j | d\mathbf{v}_4^j).$$

Переобозначая для краткости $\mathbf{G}^i = \mathbf{G}^{0,\,i}$, $\mathbf{G}^j = \mathbf{G}^{0,\,j}$, матрицу $\mathbf{G}^{ij}$, необходимую для использования в формуле (24), можно вычислить как

$$\mathbf{G}^{ij} = \mathbf{G}^j(\mathbf{G}^i)^{-1}. \tag{30}$$

Неудобство применения формулы (30) заключается в том, что в процессе расчета используются рекуррентные соотношения и к моменту определения параметров луча и его дифференциалов на j-й поверхности их значения для i-й поверхности оказываются утраченными. Чтобы использовать выражение (30), в общем случае следовало бы сохранять матрицы $\mathbf{G}^i$ для всех поверхностей системы до момента завершения расчета луча на поверхности изображения.

Подставим выражение (30) в формулу (24)

$$\delta\mathbf{v}^{ij} = \mathbf{G}^{ij}\delta\mathbf{v}^i = \mathbf{G}^j(\mathbf{G}^i)^{-1}\delta\mathbf{v}^i.$$

Обозначим произведение $(\mathbf{G}^i)^{-1}\delta\mathbf{v}^i$ через $\delta\mathbf{v}^{0,\,i}$

$$\delta\mathbf{v}^{0,i} = \left(\mathbf{G}^i\right)^{-1}\delta\mathbf{v}^i. \tag{31}$$

Тогда

$$\delta\mathbf{v}^{ij} = \mathbf{G}^j\delta\mathbf{v}^{0,i}. \tag{32}$$

Формулы (31) и (32) избавляют нас от необходимости сохранения промежуточных матриц. Запоминать следует лишь векторы возмущений координат $\delta\mathbf{v}^{0,\,i}$. В результате расчета луча через систему их количество окажется равным числу варьируемых параметров системы. Заметим, что i-й поверхности в общем случае может соответствовать несколько векторов $\delta\mathbf{v}^{0,\,i}$.

Выражения (31) и (32) можно интерпретировать следующим образом. В процессе расчета луча все местные возмущения координат, вызванные изменением параметра текущей поверхности внутри системы, с помощью преобразования (31) переносятся на нулевую поверхность системы и запоминаются. В ходе дальнейших вычислений, в случае надобности, по формуле (32) это возмущение может быть определено уже в любом другом пространстве, в том числе и в пространстве изображений.

По аналогии с координатными дифференциалами инварианта (26), обозначим линейные составляющие вектора возмущения $\delta\mathbf{v}$ через $\delta\mathbf{h}$ (это первые две координаты вектора $\delta\mathbf{s}$), а угловые составляющие – через $\delta\boldsymbol{\alpha}$ (это первые две координаты вектора $\delta\mathbf{q}$), тогда

$$\delta\mathbf{h} = (\delta x, \delta y)^{\mathrm{T}}; \quad \delta\boldsymbol{\alpha} = (\delta X, \delta Y)^{\mathrm{T}}. \tag{33}$$

С учетом выражения (26) можно окончательно записать рабочие выражения для вычисления возмущений координат j-й поверхности по возмущенным координатам i-й поверхности

$$\delta\mathbf{h}^{0,i} = n_i/n_0((\mathbf{G}_{22}^{i})^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{h}^{i} - (\mathbf{G}_{12}^{i})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\alpha}^{i}), \tag{34а}$$

$$\delta\boldsymbol{\alpha}^{0,i} = n_i/n_0(-(\mathbf{G}_{12}^{i})^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{h}^{i} + (\mathbf{G}_{11}^{i})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\alpha}^{i}). \tag{34б}$$

Рассмотрим способ вычисления приращения аберрационной функции [6], аналога волновой аберрации. Обратимся к рисунку и выражению (6). При деформации поверхности, в соответствии с теорией метода Конради [4, 5] возникает приращение оптической длины хода δt, которое может быть определено по формуле

$$\delta t = -(\delta\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{g})\Gamma n' = \delta f \Gamma n'. \tag{35}$$

При возмущении луча в пространстве изображений возникает возмущение зрачковых координат, которое приводит к изменению аберрационной функции на величину $\delta W'$, определяемую выражением

$$\delta W' = -\delta\mathbf{p}'^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\chi}', \tag{36}$$

где $\delta\mathbf{p}'$ – возмущение обобщенных зрачковых координат, $\Delta\boldsymbol{\chi}'$ – вектор обобщенных поперечных аберраций. В работе [6] показано, что эта формула является универсальной и справедливой как для ближнего, так и для дальнего типа изображения.

Для ближнего типа изображения вектор обобщенных зрачковых координат определяется как

$$\mathbf{p}' = n'\boldsymbol{\alpha}' + \mathbf{T}'\Delta\boldsymbol{\chi}', \tag{37}$$

где $\boldsymbol{\alpha}' = (X', Y')^{\mathrm{T}}$ – вектор угловых координат луча в зональной системе координат изображения, $\mathbf{T}'$ – симметрическая матрица обобщенного положения зрачка, определяемая с помощью предметных дифференциалов лучей и имеющая размерность обратных единиц длины, вектор поперечных аберраций $\Delta\boldsymbol{\chi}'$ определяется разностью координат текущего и главного лучей.

Для дальнего типа изображения вектор обобщенных зрачковых координат вычисляется по формуле вида

$$\mathbf{p}' = n'\mathbf{h}' + \mathbf{T}'\Delta\boldsymbol{\chi}', \tag{38}$$

где $\mathbf{h}' = (x', y')^{\mathrm{T}}$ – вектор линейных координат луча на выходной сфере, $\mathbf{T}'$ – симметрическая матрица обобщенного положения зрачка, определяемая с помощью предметных дифференциалов лучей и имеющая размерность единиц длины, $\Delta\boldsymbol{\chi}'$ – вектор угловых поперечных аберраций.

Возмущения зрачковых координат легко получить дифференцированием выражений (37, 38)

$$\delta\mathbf{p}' = n'\delta\boldsymbol{\alpha}' + \mathbf{T}'\delta a\left(\Delta\boldsymbol{\chi}'\right), \tag{39а}$$

$$\delta\mathbf{p}' = n'\delta\mathbf{h}' + \mathbf{T}'\delta a\left(\Delta\boldsymbol{\chi}'\right). \tag{39б}$$

Приращения линейных и угловых координат определяются по формулам (34а, 34б). Анализ приведенных формул показывает, что дополнительные затраты времени на каждый возмущаемый параметр составляют примерно столько, сколько занимает расчет луча через одну поверхность.

Аналогичные результаты могут быть получены и в случае возмущения параметров взаимного расположения поверхностей, и в случае возмущения параметров сред.

Таким образом, предложенный аналитический способ вычисления возмущений координат луча и аберрационной функции обеспечивает существенное снижение затрат времени на расчет лучей в процедуре построения матрицы влияния параметров в общем случае оптических систем как симметричных, так и лишенных симметрии.

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. *Andersen T.B.* Automatic computation of optical aberration coefficients // Appl. Opt. 1980. V. 19. № 22. P. 3800–3876.
2. *Feder D.P.* Calculation of an optical merit function and its derivatives with respect to system parameters // JOSA. 1962. V. 52. № 2. P. 913–925.
3. *Feder D.P.* Differentiation of ray-tracing equation with respect to construction parameters of rotationally symmetric optics // JOSA. 1968. V. 58. № 11. P. 1494–1505.
4. *Conrady A.E.* Applied Optics and Optical Design. Part II. New-York: Dover, 1960. 345 p.
5. *Rimmer M.* Analysis of perturbed lens systems // Appl. Opt. 1970. V.9. № 3. P. 533–537.
6. *Родионов С.А.* Автоматизация проектирования оптических систем: Учебное пособие. Л.: Машиностроение, 1982. 270 с.
7. *Родионов С.А.* О расчете дифференциалов лучей через оптические системы // Изв. вузов СССР. Приборостроение. Т. 22. № 3. С. 72–76.
8. *Герцбергер М.* Современная геометрическая оптика. М.: Иностр. лит-ра, 1962. 477 с.
9. *Родионов С.А.* Матричный аппарат гауссовой оптики в окрестности произвольного луча // Опт. и спектр. 1981. Т. 50. В. 5. С. 969–976.