УДК 535.317.6

ВЗАИМОСВЯЗЬ АБЕРРАЦИЙ ШИРОКОГО ПУЧКА ЛУЧЕЙ

© 2012 г. **Е. В. Ермолаева**, канд. техн. наук; **В. А. Зверев**, доктор техн. наук; **И. Н. Тимощук**, канд. техн. наук

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: tim_ir@rambler.ru

Представлен вывод соотношений, определяющих величину и характер изменения меридиональной и сагиттальной комы изображения в зависимости от величины и характера изменения сферической аберрации и отступления от условия синусов в любой зоне светового пучка лучей, формирующего изображения. В основу вывода положены свойства световой трубки и геометрические соотношения, определяющие ход лучей в оптической системе.

Ключевые слова: *оптическая система, световой луч, сферическая аберрация, кома, меридиональная плоскость, сагиттальная плоскость, входной зрачок, выходной зрачок.*

Коды OCIS: 200.0200, 220.0220.

Поступила в редакцию 13.10.2011.

К числу монохроматических аберраций широкого пучка лучей относятся сферическая аберрация и кома. Сферической аберрацией называется нарушение гомоцентричности пучка лучей, прошедшего через оптическую систему, без нарушения симметрии его строения. Нарушение симметрии строения выходящего из оптической системы широкого пучка лучей, излучаемого внеосевой точкой предмета и приводящее к нарушению осевой симметрии пятна рассеяния в изображении точки, определяет аберрацию, называемую комой.

Элементарный световой поток, излучаемый элементарной площадкой dS в пределах телесного угла $d\Omega$ элементарного светового пучка, определяется выражением [1]

$$d^2\Phi = \pi L dS \cos\sigma d\Omega, \qquad (1)$$

где L – яркость излучения, σ – угол между осью телесного угла $d\Omega$ и оптической осью системы. Аналогичные величины в пространстве изображений обозначим теми же символами, но со штрихом. При этом

$$d^2\Phi' = \tau d^2\Phi = \tau\pi L' dS' \cos\sigma' d\Omega'. \qquad (2)$$

Среды, разделяемые поверхностями оптической системы, будем считать абсолютно прозрачными, т. е. будем считать, что коэффициент пропускания оптической системы $\tau = 1$. Приравняв правые части выражений (1) и (2), при $L/n^2 = L'/n'^2$ получаем

$$n^2 dS \cos\sigma d\Omega = n'^2 dS' \cos\sigma' d\Omega'. \qquad (3)$$

Полученная формула называется теоремой или инвариантом Штраубеля.

Пусть $dS = \pi dl_t dl_s$, $dS' = \pi dl'_t dl'_s$, $d\Omega = \pi d\sigma_t d\sigma_s$, $d\Omega' = \pi d\sigma'_t d\sigma'_s$, где dl_t, dl_s, dl'_t, dl'_s – элементарные отрезки предмета и изображения в меридиональной и в сагиттальной плоскостях; $d\sigma_t$, $d\sigma_s$, $d\sigma'_t$, $d\sigma'_s$ – элементарные углы, образованные лучами с осью телесного угла в меридиональной и в сагиттальной плоскостях в пространстве предметов и изображений. Раскрыв соответствующие величины, входящие в выражение (3), получаем

$$n^2 dl_t \cos\sigma_t d\sigma_t dl_s d\sigma_s = n'^2 dl'_t \cos\sigma'_t d\sigma'_t dl'_s d\sigma'_s. \qquad (4)$$

Отсюда следуют выражения, определяющие инварианты Лагранжа–Гельмгольца для плоского пучка лучей в виде:

– обобщенный инвариант в меридиональной плоскости

$$ndl_t \cos\sigma_t d\sigma_t = n' dl_t' \cos\sigma_t' d\sigma_t', \tag{5}$$

– в сагиттальной плоскости

$$ndl_s d\sigma_s = n' dl_s' d\sigma_s'. \tag{6}$$

При этом поперечное увеличение изображения, образованного лучами в меридиональной плоскости, равно

$$V_t = \frac{dl_t'}{dl_t} = \frac{n\cos\sigma_t d\sigma_t}{n'\cos\sigma_t' d\sigma_t'} = \frac{nd(\sin\sigma_t)}{n'd(\sin\sigma_t')}, \tag{7}$$

а поперечное увеличение изображения, образованного лучами в сагиттальной плоскости, равно

$$V_s = \frac{dl_s'}{dl_s} = \frac{nd\sigma_s}{n'd\sigma_s'}. \tag{8}$$

Следовательно, в реальной оптической системе лучи, исходящие из одной и той же внеосевой точки предмета, пересекают плоскость изображения в различных точках, при этом осевая симметрия пятна рассеяния в изображении точки нарушается.

Для анализа структуры широкого пучка лучей при малом поле (малой величине предмета) обратимся к рис. 1. На этом рисунке лучи AN_1 и AN_2 лежат в меридиональной плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка. Повернув меридиональную плоскость на малый угол $d\psi$, получаем новое положение лучей AN_1 и AN_2, образующее с исходным сагиттальные плоскости. При этом угол между лучами в сагиттальной плоскости равен

$$-d\sigma_s = -AP\,\mathrm{tg}\,\sigma_t d\psi \frac{\cos\sigma_t}{AP} = -\sin\sigma_t d\psi.$$

Аналогично находим $d\sigma_s' = \sin\sigma_t' d\psi$.

Полученные соотношения позволяют выражение (8) представить в виде

$$V_s = \frac{n\sin\sigma_t}{n'\sin\sigma_t'}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что величина $A_s'B_{st}' = -dl_{st}'$ изображения предмета $AB = dl$, образованного лучами, лежащими в сагиттальных плоскостях, симметричных относительно плоскости рисунка, т. е. при $\sigma_{t2} = -\sigma_{t1} = \sigma_t$, одна и та же, а само изображение расположено в плоскости рисунка. При этом

$$dl_{st}' = V_s dl. \tag{10}$$

В том случае, когда в изображении осевой точки присутствует сферическая аберрация, координата y_{0st}' точка пересечения луча $P'B_{st}'$ с плоскостью изображения Гаусса, т. е. координата точки B_{0st}' на рис. 1, определяется из соотношения сторон подобных треугольников $P'A_0'B_{0st}'$ и $P'A_s'B_{st}'$: $\dfrac{y_{0st}'}{dl_{st}'} = \dfrac{s_0' - z_p'}{s_0' - z_p' + \Delta s'}$. Полагая величину $\left|\dfrac{\Delta s'}{s_0' - z_p'}\right| \ll 1$, получаем

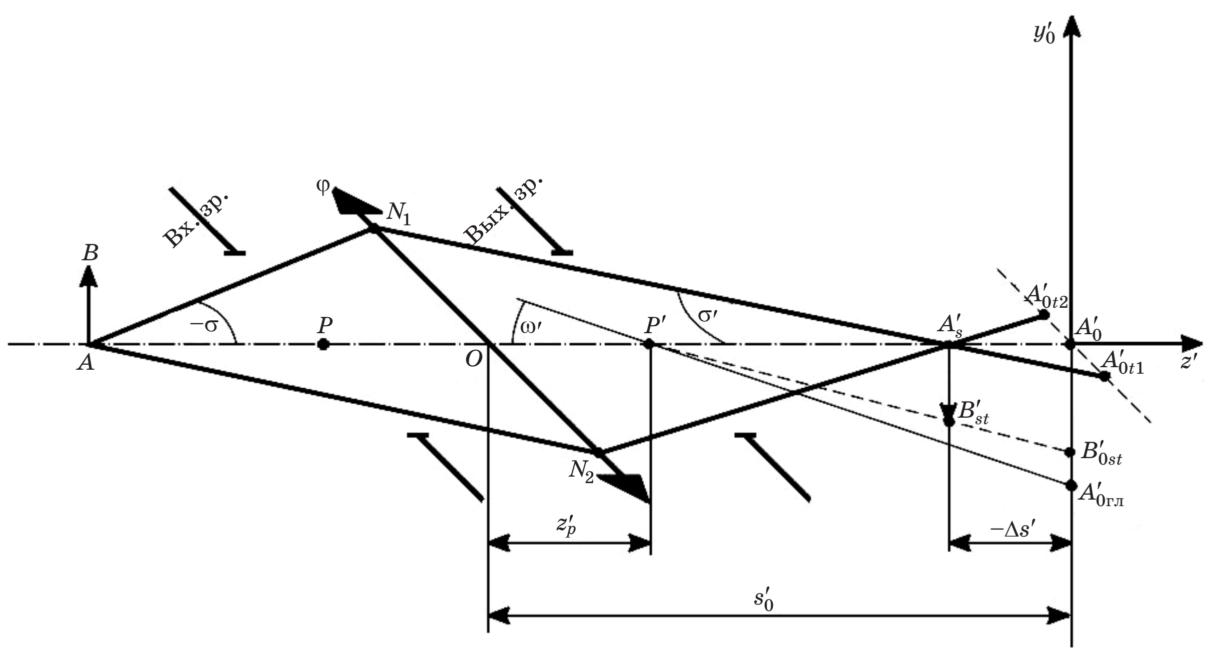

Рис. 1. Структура широкого пучка лучей, формирующего изображение предмета малой величины.

$$y'_{0st} = \left(1 - \frac{\Delta s'}{s'_0 - z'_p}\right) dl'_{st}. \qquad (11)$$

Координату $y_{0\text{гл}}$ точки пересечения главного луча с плоскостью изображения Гаусса находим из выражения (7) при $\sigma_t \to 0$ и $\sigma'_t \to 0$

$$y'_{0\text{гл}} = \frac{n d\sigma_t}{n' d\sigma'_t} dl = V_0 dl = dl'_0 \qquad (12)$$

где V_0 – поперечное увеличение изображения в плоскости Гаусса.

Разность величин, определяемых выражениями (11) и (12), равную $\delta g'_{0\text{к}s}$, принято называть сагиттальной комой или ошибкой желоба [2]. Используя выражения (10), (11) и (12), получаем

$$\delta g'_{0\text{к}s} = \left[\left(1 - \frac{\Delta s'}{s'_0 - z'_p}\right) V_s - V_0\right] dl. \qquad (13)$$

При $\Delta s' \equiv 0$ величина $\delta g'_{0\text{к}s} = (V_s - V_0) dl$. Условие

$$V_s - V_0 = \frac{n \sin \sigma_t}{n' \sin \sigma'_t} - V_0 = 0$$

определяет условие синусов Аббе. Определим отступление от условия синусов отношением $(V_s - V_0)/V_0 = -\delta_s$. При этом

$$V_s = (1 + \delta_s) V_0. \qquad (14)$$

Это равенство позволяет придать выражению (13), определяющему величину сагиттальной комы, вид выражения, полученного Конради [3]

$$\delta g'_{0\text{к}s} = \left[\delta_s + (1 + \delta_s) \frac{\Delta s'}{z'_p - s'_0}\right] dl'_0. \qquad (15)$$

Для анализа структуры широкого пучка световых лучей в меридиональной плоскости, образующего изображение внеосевой точки предмета, обратимся к рис. 2, где точка A'_t представляет собой изображение осевой точки A, образованное оптической системой φ бесконечно узким меридиональным пучком лучей, исходящим из точки A под углом $-\sigma_t$; отрезок $A'_t B'_t = -dl'_t$ представляет собой изображение малого предмета dl бесконечно узкими меридиональными пучками лучей, при этом величина dl'_t определяется формулой (7). Определим в плоскости, перпендикулярной оптической оси и содержащей отрезок $A'_t B'_t$, координаты точки пересечения с этой плоскостью главного луча, проходящего через центр выходного зрачка P' и образующего угол w' с оптической осью, и двух точек B'_t, для которых величина изображения определяется при двух значениях угла $\sigma' = \sigma'_1 = -\sigma'_2$. Обозначим эти координаты через $y'_{\text{гл}}$, y'_{t1} и y'_{t2}. Величину $\delta g'_{\text{к}t}$, определяемую равенством $\delta g'_{\text{к}t} = \frac{y'_{t1} + y'_{t2}}{2} - y'_{\text{гл}}$, принято называть меридиональной комой в изображении точки малого предмета dl в плоскости предмета, образованном бесконечно узки-

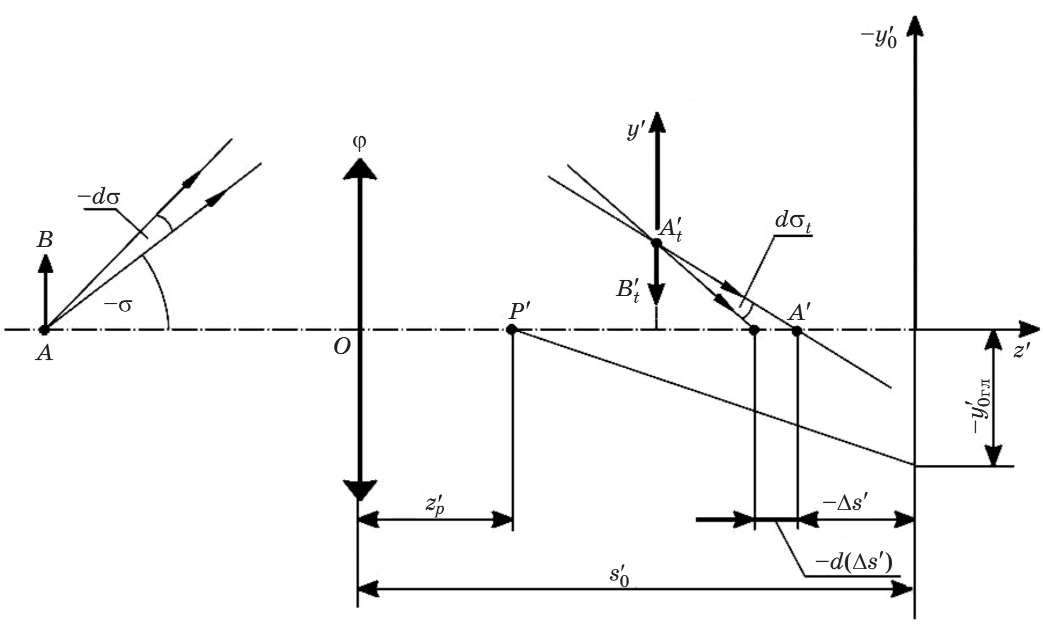

Рис. 2. Структура широкого пучка световых лучей в меридиональной плоскости, формирующего изображение внеосевой точки предмета.

ми меридиональными пучками лучей. В соответствии с рис. 2 координата y'_t точки B'_t равна

$$y'_t = A'A'_t \sin\sigma'_t + dl'_t. \qquad (16)$$

Из того же рисунка находим, что отрезок

$$A'A'_t = -\frac{d(\Delta s')}{d\sigma'_t}\sin\sigma'_t. \qquad (17)$$

Учитывая выражение (7), при $dl'_t = V_t dl_t$ выражение (16) можно представить в виде

$$y'_t = -\frac{d(\Delta s')}{d\sigma'_t}\sin^2\sigma'_t + \frac{n\cos\sigma_t d\sigma_t}{n'\cos\sigma'_t d\sigma'_t}dl_t. \qquad (18)$$

Заметим, что выражение $\frac{d(\Delta s')}{d\sigma'_t}\sin^2\sigma'_t$ представляет собой нечетную функцию относительно угла σ'_t и при изменении знака угла изменяется знак функции при том же ее абсолютном значении. Применив выражение (18), получаем

$$\frac{y'_{t1} + y'_{t2}}{2} = \frac{n\cos\sigma_t d\sigma_t}{n'\cos\sigma'_t d\sigma'_t}dl_t. \qquad (19)$$

Координата $y'_{0\text{гл}} = dl'_0$ точки пересечения главного луча с гауссовой плоскостью изображения определяется выражением (12). При этом координата $y'_{\text{гл}}$ точки пересечения главного луча с рассматриваемой плоскостью, как следует из рис. 2, равна

$$y'_{\text{гл}} = dl'_0 + A'_0 A'_{t0} w', \qquad (20)$$

где w' – половина углового поля изображения, равная

$$w' = \frac{dl'_0}{z'_p - s'_0}. \qquad (21)$$

В соответствии с тем же рисунком

$$A'_0 A'_{t0} = A'_0 A' + A'A'_{t0} = -\Delta s' + A'A'_t \cos\sigma'_t.$$

Учитывая выражение (17), получаем $A'_0 A'_{t0} = -q$, где

$$q = \Delta s' + \frac{d(\Delta s')}{d\sigma'_t}\sin\sigma'_t \cos\sigma'_t. \qquad (22)$$

Подставив полученное выражение в формулу (20), находим, что

$$y'_{\text{гл}} = dl'_0 - qw'. \qquad (23)$$

Соотношения (19), (22) и (23) позволяют определить величину меридиональной комы в рассматриваемой плоскости выражением вида

$$\delta g'_{\text{к}t} = \frac{n\cos\sigma_t d\sigma_t}{n'\cos\sigma'_t d\sigma'_t}dl_t - dl'_0 + qw'$$

или

$$\delta g'_{\text{к}t} = \frac{nd(\sin\sigma_t)}{n'd(\sin\sigma'_t)}dl_t - dl'_0 + qw'. \qquad (24)$$

Для последующего преобразования полученного выражения обратимся к соотношениям (9) и (14), из которых следует, что

$$n\sin\sigma_t = (1+\delta_s)V_0 n'\sin\sigma'_t.$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$\frac{nd\sin\sigma_t}{n'd\sin\sigma'_t} = (1+\delta_s)V_0 + V_0\sin\sigma'_t\frac{d\delta_s}{d(\sin\sigma'_t)}.$$

Подставив это выражение в формулу (24), представим ее в виде:

$$\delta g'_{\text{к}t} = (1+\delta_s)dl'_0 + \frac{d\delta_s}{d(\sin\sigma'_t)}\sin\sigma'_t dl'_0 - dl'_0 + qw'$$

или

$$\delta g'_{\text{к}t} = \frac{d(\delta_s\sin\sigma'_t)}{d(\sin\sigma'_t)}dl'_0 + qw'. \qquad (25)$$

Определим величину меридиональной комы $\delta g'_{0\text{к}t}$ в гауссовой плоскости изображения, для чего найдем координаты y'_{0t} точек пересечения с этой плоскостью крайних лучей наклонного пучка, проходящих через точки B'_{t1} и B'_{t2}. Из геометрии хода лучей следует, что

$$y'_{0t} = y'_t + \Delta\text{tg}\sigma'_t,$$

где Δ – продольное смещение рассматриваемой плоскости относительно гауссовой плоскости изображения. Очевидно, что крайние лучи наклонного пучка лучей, формирующего изображение внеосевой точки, образуют разные по величине и по знаку углы как с оптической осью, так и с главным лучом пучка. Учитывая это, величину комы в гауссовой плоскости изображения определим выражением

$$\delta g'_{0\text{к}t} = \frac{y'_{0t1} + y'_{0t2}}{2} - y'_{0\text{гл}} =$$
$$= \frac{y'_{0t1} + y'_{0t2}}{2} - y'_{\text{гл}} + \left(\frac{\text{tg}\sigma'_{t1} + \text{tg}\sigma'_{t2}}{2} - w'\right)\Delta,$$

которое можно представить в виде

$$\delta g'_{0\text{к}t} = \delta g'_{\text{к}t} + \left(\frac{\text{tg}\sigma'_{t1} + \text{tg}\sigma'_{t2}}{2} - w'\right)\Delta. \qquad (26)$$

Уместно вспомнить замечание Г.Г. Слюсарева о том, что "...при определении комы пучка любого отверстия должны быть приняты предосторожности, совершенно излишние при выводе комы третьего порядка. В частности, необходимо точно условиться о выборе двух крайних лучей, по которым определяется кома" [4].

Если крайние лучи внеосевого пучка образуют с главным лучом углы $\pm\omega'$, то с оптической осью один луч образует угол $\sigma'_{t1} = \omega' + w'$, другой луч – угол $\sigma'_{t2} = \omega' - w'$, где w' – полевой угол в пространстве изображений. При этом

$$\sin\sigma'_{t1} = \sin\omega'\cos w' + \cos\omega'\sin w'$$

$$\text{и} \quad \sin\sigma'_{t2} = \sin w'\cos\omega' - \cos w'\sin\omega'.$$

Следуя [4], "...рассмотрим два луча, выбранные таким образом, что синусы углов, образуемых этими лучами с осью, отличаются от синуса угла, образуемого с осью главным лучом, на одинаковые величины", т. е. рассмотрим два луча, образующих с оптической осью такие углы σ'_{t1} и σ'_{t2}, при которых

$$\sin\sigma'_{t1} - \sin w' = \sin w' - \sin\sigma'_{t2} = \sin\omega'$$

или, учитывая малость углов w',

$$\sin\sigma'_{t1} - w' = w' - \sin\sigma'_{t2} = \sin\omega'.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \sin\sigma'_{t1} &= \sin\omega' + w', \\ \sin\sigma'_{t2} &= -\sin\omega' + w'. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

С точностью до членов, содержащих угол w' в первой степени, имеем

$$\mathrm{tg}\sigma'_{t1} = \mathrm{tg}\omega' + \frac{w'}{\cos^3\omega'}$$

$$\text{и} \quad \mathrm{tg}\sigma'_{t2} = -\mathrm{tg}\omega' + \frac{w'}{\cos^3\omega'}.$$

Подставив эти соотношения в формулу (26), получаем

$$\delta g'_{0\text{кт}} = \delta g'_{\text{кт}} + \left(\frac{1}{\cos^3\omega'} - 1\right)\Delta w'. \qquad (28)$$

Учитывая, что $\sin w' = \sin\sigma'_{t1} - w' = w' - \sin\sigma'_{t2}$, можно показать, что с точностью до величины w' первого порядка малости

$$\frac{w'}{\cos^3\omega'} = \frac{w'}{\cos^3\sigma'_{t1}} = \frac{w'}{\cos^3\sigma'_{t2}} = \frac{w'}{\cos^3\sigma'_t}.$$

Подставив при этом выражения (21), (22) и (25) в выражение (28), преобразуем его к виду, полученному в работе [4]

$$\delta g'_{0\text{кт}} = \frac{d\left(\delta_s \sin\sigma'_t\right)}{d\left(\sin\sigma'_t\right)} + \left[\frac{\Delta s'}{\cos^3\sigma'_t} + \frac{d\left(\Delta s'\right)}{d\left(\sin\sigma'\right)}\mathrm{tg}\sigma'_t\right]\frac{dl'_0}{z'_p - s'_0}$$

или

$$\delta g'_{0\text{кт}} = dl'_0 \frac{d}{d\left(\sin\sigma'_t\right)}\left(d_s \sin\sigma'_t + \frac{\Delta s'}{z'_p - s'_0}\mathrm{tg}\sigma'_t\right). \qquad (29)$$

В области умеренных значений числовых апертур в пространстве изображений (например, до $\sin\sigma'_t \le 0{,}25$) можно считать, что $\mathrm{tg}\sigma'_t \approx \sin\sigma'_t$. При этом формула (29) принимает вид

$$\delta g'_{0\text{кт}} = dl'_0 \frac{d}{d\left(\sin\sigma'_t\right)}\left[\sin\sigma'_t\left(\delta_s + \frac{\Delta s'}{z'_p - s'_0}\right)\right]. \qquad (30)$$

Полагая величины δ_s и $\dfrac{\Delta s'}{z'_p - s'_0}$ малыми, формулу (15) можно представить в виде

$$\delta g'_{0\text{кs}} = \left(\delta_s + \frac{\Delta s'}{z'_p - s'_0}\right)dl'_0. \qquad (31)$$

Это выражение позволяет формулу (30) записать в виде

$$\delta g'_{0\text{кт}} = \frac{d}{d\left(\sin\sigma'_t\right)}\left(\delta g'_{0\text{кs}}\sin\sigma'_t\right)dl'_0. \qquad (32)$$

Если величины δ_s и $\Delta s'$ определяются функциями вида:

$$\delta_s = a\sin^2\sigma'_t \quad \text{и} \quad \Delta s' = b\sin^2\sigma'_t,$$

то формула (30) принимает вид формулы Штебле–Лихоцкого

$$\delta g'_{0\text{кт}} = 3\left(\delta_s + \frac{\Delta s'}{z'_p - s'_0}\right)dl'_0. \qquad (33)$$

Сопоставив выражения (31) и (33), получаем, что в этом случае $\delta g'_{0\text{кт}} = 3\delta g'_{0\text{кs}}$.

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волосов Д.С., Цивкин М.В.* Теория и расчет светооптических систем. М.: Искусство, 1960. 526 с.
2. *Берек М.О.* Основы практической оптики. М.–Л.: ГТТИ, 1933. 129 с.
3. *Слюсарев Г.Г.* Геометрическая оптика. М.–Л.: АН СССР, 1946. 332 с.
4. *Слюсарев Г.Г.* Методы расчета оптических систем. Л.: Машиностроение, 1969. 672 с.