

## МЕТОД МАСШТАБИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

© 2013 г. Д. А. Федоров

СПбНИУ ИТМО, Санкт-Петербург

E-mail: End-ik@ya.ru

В работе описаны методы кратномасштабной интерполяции. Исследованы методы масштабирования изображений с целочисленным коэффициентом на основе многоканального дискретного вейвлетного преобразования. Разработаны алгоритмы построения многоканальных неортогональных вейвлет-фильтров на основе  $B$ -сплайнов и ортогональных вейвлет-фильтров. Исследованы предложенные алгоритмы масштабирования изображений. Получены оценки эффективности разработанных алгоритмов.

*Ключевые слова:* кратномасштабный анализ, вейвлеты, многоканальное разложение, пространственная фильтрация.

Коды OCIS: 100.7410.

Поступила в редакцию 16.10.2012.

### Введение

Одной из важных задач обработки изображений является масштабирование, применяемое для визуализации и многомасштабного анализа.

Наиболее распространенным методом масштабирования изображений является полиномиальная интерполяция (например, билинейная или бикубическая). Однако при полиномиальной интерполяции в пространственной области возникают различные искажения, такие как размытие, блочность, “бегущая волна” на границах объектов.

Дискретное вейвлетное преобразование (ДВП) позволяет выделить низкочастотную (НЧ) информацию – крупные детали, и высокочастотную (ВЧ) информацию – мелкие детали на изображении. Такое представление на сетке масштабов позволяет исключить артефакты, связанные с уменьшением пространственной области изображения при неизменности его спектра.

Классическая схема ДВП предполагает разложение сигнала на две составляющие (субполосы) – НЧ и ВЧ на каждом шаге для различных базисов вейвлетов. Это дает возможность

изменять размер изображения с коэффициентом  $2^K$ , где  $K$  – целое число [1, 2]. При уменьшении изображения используется НЧ составляющая ДВП, ВЧ информация при этом не используется. Обратное преобразование применяется для увеличения масштаба изображений. При этом будем использовать ВЧ составляющие, заполненные нулями.

Разделение сигнала на две полосы не позволяет получать коэффициент масштабирования, отличный от  $2^K$ . Поэтому основная задача сводится к разработке и исследованию метода масштабирования изображений с произвольным целочисленным коэффициентом на основе ДВП.

### $N$ -канальное вейвлет преобразование

Многоканальное ДВП расширяет диапазон коэффициентов масштабирования и позволяет получать масштабы кратности  $N^K$ . Преобразование является разделимым и удобно тем, что может быть представлено в виде свертки изображения с коэффициентами фильтров. Схема для одномерного многоканального преобразования показана на рис. 1, где приняты следующие обозначения:  $H_0$  – НЧ фильтр раз-

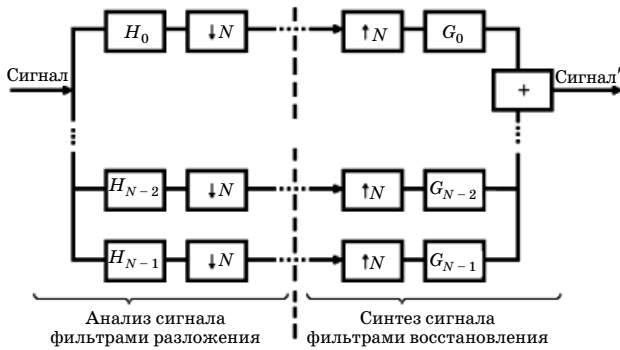


Рис. 1. Схема одномерного многоканального ДВП (пояснения в тексте).

ложения,  $H_{1-(N-1)}$  – ВЧ фильтры разложения,  $G_0$  – НЧ фильтр восстановления,  $G_{1-(N-1)}$  – ВЧ фильтры восстановления,  $\downarrow N$  – прореживание, оставляем каждый  $N$ -й элемент;  $\uparrow N$  – добавление  $N - 1$  нулей между парами отсчетов.

При двумерном преобразовании по многоканальной схеме выполняется преобразование по строкам, а затем для каждой из областей – по столбцам. В итоге получим  $N^2$  областей, одна

из которых будет содержать аппроксимирующие коэффициенты, а остальные – детализирующие. При восстановлении выполняется обратная последовательность действий и используются фильтры восстановления.

Пример разложения изображения для  $N = 3$  показан на рис. 2. Для улучшения визуального восприятия рисунков блоки детализирующих коэффициентов были умножены на константу.

Поскольку эффективность масштабирования зависит от коэффициентов фильтров, рассмотрим особенности расчета многоканальных вейвлет-фильтров.

### Многоканальные вейвлет-фильтры

В работе использованы методы построения вейвлет-фильтров с компактным носителем – неортогональные вейвлет-фильтры на основе  $B$ -сплайнов [3, 4] и ортогональные вейвлет-фильтры [3, 5].

В основе методики построения многоканальных вейвлет-фильтров лежит построение матрицы фильтров



Рис. 2. Пример разложения изображения Lena для  $N = 3$ .

$$\mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(\rho z) & \dots & H_0(\rho^{N-1}z) \\ H_1(z) & H_1(\rho z) & \dots & H_1(\rho^{N-1}z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-1}(\rho z) & \dots & H_{N-1}(\rho^{N-1}z) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\rho = \exp(-i2\pi/N)$ , и обратной матрицы

$$\mathbf{G}(z) = \begin{pmatrix} G_0(z) & G_0(\rho z) & \dots & G_0(\rho^{N-1}z) \\ G_1(z) & G_1(\rho z) & \dots & G_1(\rho^{N-1}z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N-1}(z) & G_{N-1}(\rho z) & \dots & G_{N-1}(\rho^{N-1}z) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Необходимо также выполнить условие точного восстановления, которое записывается в виде

$$\mathbf{H}(z)\mathbf{G}^T(z) = N. \quad (3)$$

Нас интересуют фильтры разложения  $H_0(z)$ ,  $H_1(z)$ , ...,  $H_{N-1}(z)$ , так как они имеют вещественные коэффициенты, и фильтры восстановления, обратные фильтрам разложения, —  $G_0(z)$ ,  $G_1(z)$ , ...,  $G_{N-1}(z)$ .  $H_0(z)$  и  $G_0(z)$  — это НЧ фильтры разложения и восстановления соответственно, остальные фильтры высокочастотные.

В [3, 4] приводится алгоритм построения неортогональных вейвлет-фильтров на основе  $B$ -сплайнов, для которых доказана теорема о  $N$ -масштабируемости. Рассмотрим полученные фильтры.

Матрица  $\mathbf{H}(z)$  для  $B$ -сплайнов первой степени записывается в виде

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{A}'_0 \alpha_0^{-1} \mathbf{P}_e \alpha_0 \mathbf{R}(z). \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{R}(z)$  — матрица специального вида —

$$\mathbf{R}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z & \rho z & \dots & \rho^2 z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{N-1} & \rho^{N-1} z^{N-1} & \dots & \rho^{(N-1)(N-1)} z^{N-1} \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{N} & 1/\sqrt{N} & 1/\sqrt{N} & \dots & 1/\sqrt{N} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/\sqrt{N(N-1)} & 1/\sqrt{N(N-1)} & 1/\sqrt{N(N-1)} & \dots & (1-N)/\sqrt{N(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$\mathbf{A}'_0$  — матрица с ортогональными строками —

$$\mathbf{A}'_0 = \begin{pmatrix} N & N & N & \dots & N \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & N-1 \end{pmatrix}; \quad (6)$$

матрицу  $\alpha_0$  получают преобразованием Фурье на циклической группе  $N$ -го порядка от частотной функции  $B$ -сплайна первого порядка (7), в случае необходимости дополненная ортогональной строкой;  $\alpha_0^{-1}$  — обратная ей матрица;

$$\mathbf{H}_0(z) = z^{-N+1}(1+z+\dots+z^{N-1})^2/N^2, \quad (7)$$

матрица оператора проектирования  $\mathbf{P}_e$  имеет вид

$$\mathbf{P}_e = \begin{pmatrix} z^{-N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Поскольку вейвлет-фильтры, полученные из соотношения (4), не являются ортогональными, матрицу фильтров восстановления получают из следующего соотношения:

$$\mathbf{G}^T(z) = N^2 \mathbf{R}^{-1}(z) (\mathbf{A}'_0 \alpha_0^{-1} \mathbf{P}_e \alpha_0)^{-1}. \quad (9)$$

Для получения матрицы  $\mathbf{H}(z)$  в ортогональном случае используют формулу

$$\mathbf{H}(z) = N^{-1/2} \mathbf{A}_0 \mathbf{D}_p(z^N) \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{R}(z). \quad (10)$$

Здесь в качестве  $\mathbf{A}_0$  берут ортогональную матрицу вида

$\mathbf{M}$  — матрица поворота,  $\mathbf{R}(z)$  определяется (4),  $\mathbf{D}_p$  — диагональная матрица с значениями  $(z^N)^p$ , где  $p$  — целое.

## Результаты экспериментальных исследований

Оценка эффективности масштабирования выполнялась на базе 20 полутоновых тестовых изображений [6, 7], в том числе Lena – № 1, Baboon – № 11, Pappers – № 10, Zelda – № 8.

Для оценки качества масштабирования изображений использован критерий пикового отношения сигнал/шум (ПОСШ) для восьмибитных полутоновых изображений:

$$\text{ПОСШ} = 20 \log_{10}(255/\text{СКО}),$$

где СКО – среднеквадратическое отклонение, оцениваемое соотношением

$$\text{СКО} = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^X \sum_{j=1}^Y (a_{i,j} - b_{i,j})^2 \right) / (XY)},$$

в котором  $a_{i,j}$  и  $b_{i,j}$  – значения яркости пиксела оригинального и полученного изображений с координатами  $(i, j)$ ,  $XY$  – количество пикселей в изображении.

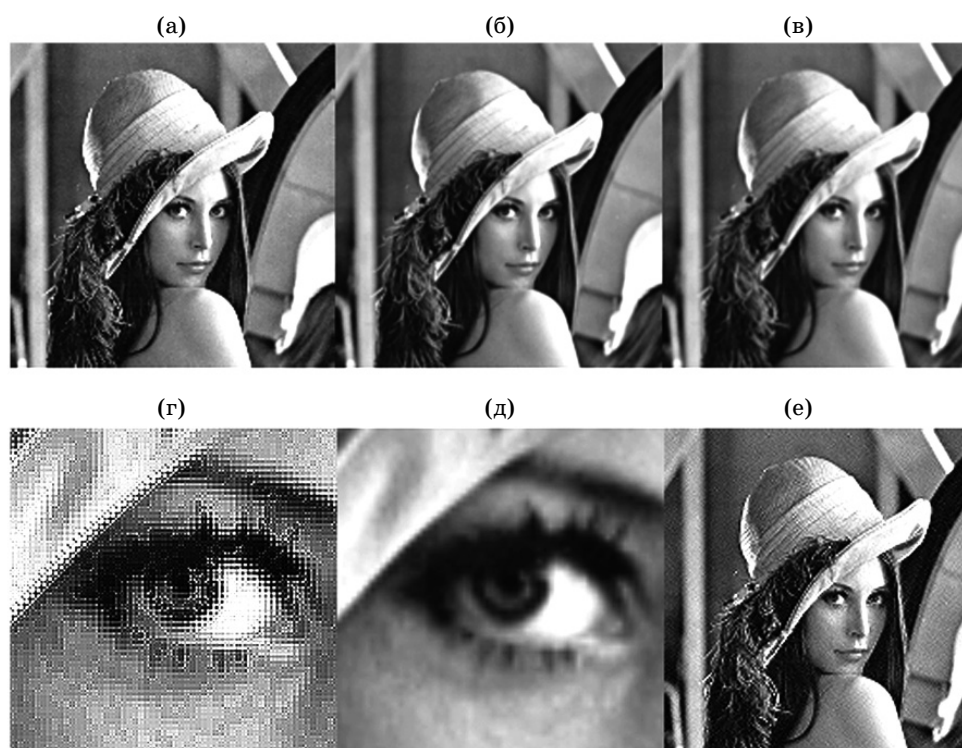
Как уже говорилось, при уменьшении масштаба изображения с помощью полиномиаль-

ной интерполяции могут возникать искажения. При использовании метода уменьшения с помощью кубического сплайна это проявляется в виде бегущей волны на границах объектов (рис. 3а). При уменьшении изображений с помощью вейвлет-преобразования этот эффект не проявляется. На рис. 3б и 3в показаны результаты уменьшения изображения с помощью неортогонального и ортогонального фильтров соответственно. Различие между ними вызвано различием коэффициентов НЧ фильтров.

Форма исследуемого обращенного неортогонального вейвлет-фильтра плохо подходит для масштабирования изображения. Он вносит искажения в конечный результат как при уменьшении, так и при увеличении масштаба (рис. 3г и 3е).

Использование в качестве масштабирующей функции  $B$ -сплайна первого порядка дает результаты, близкие к интерполяции кубическим сплайном, как представлено на графике (рис. 4).

Результаты сравнения эффективности масштабирования для разных методов, показан-



**Рис. 3.** Примеры масштабирования различными методами. а – уменьшение масштаба кубическим сплайном, б – с помощью неортогонального фильтра, в – с помощью ортогонального фильтра, г – фрагмент изображения, увеличенного с помощью обращенного неортогонального вейвлет-фильтра, д – фрагмент для сравнения, е – уменьшение масштаба с помощью обращенного неортогонального вейвлет-фильтра.

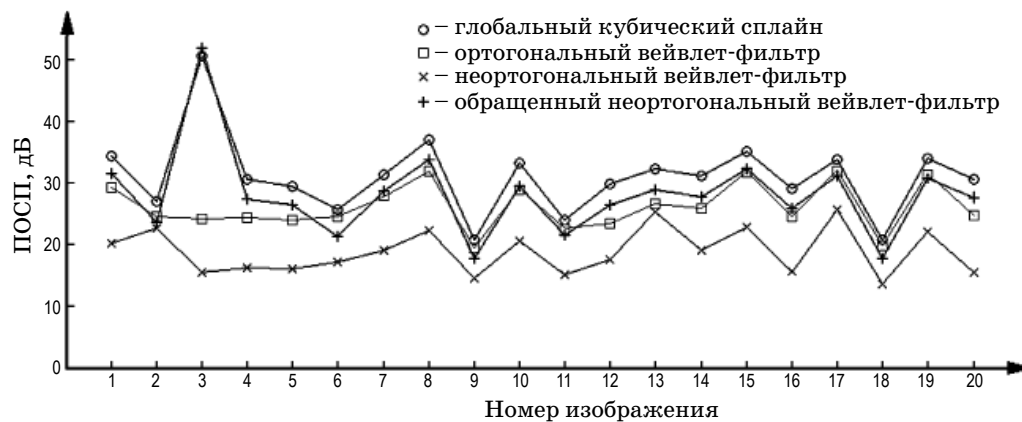


Рис. 4. Сравнение масштабирования  $B$ -сплайном первого порядка по вейвлетной схеме и глобального кубического сплайна для  $N = 3$ .

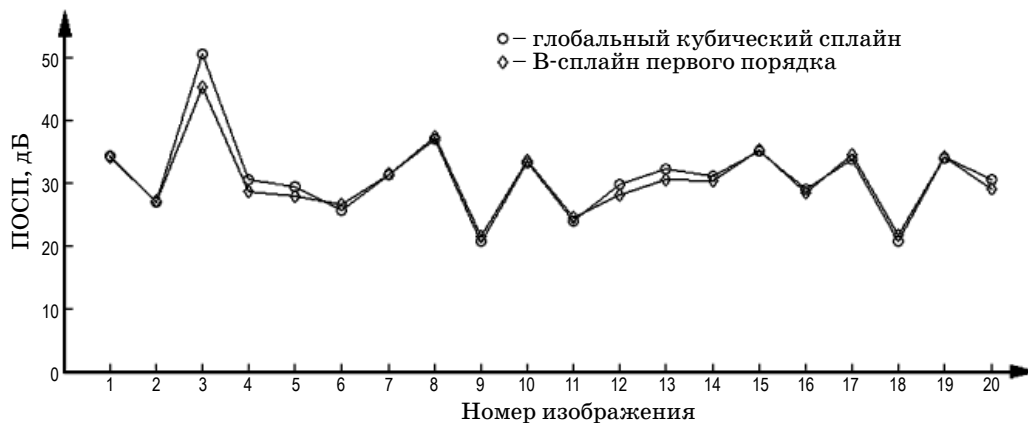


Рис. 5. Оценка эффективности масштабирования для различных методов при  $N = 3$ .

ные на рис. 5, характерны при изменении  $N$  от 2 до 5.

### Заключение

В работе представлены результаты разработки кратномасштабной интерполяции. Исследованы методы масштабирования изображений с целочисленным коэффициентом на основе многоканального ДВП. Разработаны алгоритмы построения многоканальных неортогональных вейвлет-фильтров на основе  $B$ -сплайна первой степени и ортогональных вейвлет-фильтров. Программно реализованы методы построения вейвлет-фильтров для заданного  $N$ . Реализовано масштабирование с произвольным целочисленным коэффициентом, и исследова-

на его эффективность. Алгоритм дает хорошие результаты при уменьшении изображений.

Показано, что при увеличении изображений методом дискретного вейвлетного преобразования необходима разработка алгоритма, учитывающего высокочастотную информацию. Выявлена зависимость эффективности масштабирования от вида вейвлета.

Дальнейшие работы по исследованию применения  $N$ -канального ДВП к задачам масштабирования изображений должны включать рассмотрение вариативности вейвлетов и нахождение низкочастотных фильтров анализа и синтеза, согласованных с характерными особенностями сигнала, а также рассмотрение базисов с нецелым показателем масштабирования.

\* \* \* \* \*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Emil D., Sonja G., Mislav G.* The use of wavelets in image interpolation: possibilities and limitations // RADIOENGINEERING. 2007. V. 16. № 4. P. 101–109.
  2. *Acharya T., Tsai P.S.* Computational foundations of image interpolation algorithms // ACM Ubiquity. 2007. V. 8. № 42.
  3. *Смоленцев Н.К.* Вейвлет-анализ в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2010. 448 с
  4. *Подкур П.Н.* Исследовано в России. 2007. 14. С. 128–138. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2007/014.pdf>.
  5. *Подкур П.Н.* Исследовано в России. 2007. 93. С. 965–974. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2007/093.pdf>.
  6. База изображений Photo database // [http://www.petitcolas.net/fabien/watermarking/image\\_database/](http://www.petitcolas.net/fabien/watermarking/image_database/).
  7. База изображений Kodak True Color Image // <http://r0k.us/graphics/kodak/>.
-