

## ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ИМПУЛЬСА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ЧИРПЕ ДВУХРЕШЕТЧАТОЙ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

© 2011 г. А. В. Гитин, доктор физ.-мат. наук\*; А. А. Андреев, доктор физ.-мат. наук\*\* \*\*

\* Институт нелинейной оптики и сверхбыстрой спектроскопии им. Макса Борна, Берлин, Германия

\*\* НПК “Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова”, Санкт-Петербург

E-mail: agitin@mbi-berlin.de

В качестве дисперсионной линии задержки для ультракоротких лазерных импульсов обычно используется система Трейси, состоящая из пары параллельных пропускающих дифракционных решеток. Ограниченный этими решетками слой свободного пространства представляет простейшую изопланарную (инвариантную по отношению к сдвигу в пространстве) оптическую систему. С использованием теории изопланарных оптических систем исследована длительность импульса в области пространственного чирпа системы Трейси.

**Ключевые слова:** ультракороткие лазерные импульсы, компрессор, фронт импульса нулевой фазы, изопланарная оптическая система, функция распределения Вигнера, пространственный чирп.

Коды OCIS: 050.0050, 070.0070, 140.0140, 320.0320

Поступила в редакцию 29.04.2011

### Введение

Оптика ультракоротких световых импульсов – один из наиболее быстро развивающихся разделов лазерной оптики. Чем короче лазерный импульс, тем шире его спектр частот и тем больше на него влияет дисперсия среды, поэтому оптика ультракоротких световых импульсов имеет важный предмет исследования – дисперсионные линии задержки, позволяющие управлять длительностью импульсов [1]. Любая дисперсионная линия задержки – это фильтр временных частот с фазовой передаточной функцией [2].

В настоящее время в качестве дисперсионной линии задержки с отрицательной дисперсией широко используется система Трейси (СТ), состоящая из пары либо отражающих [3, 4], либо пропускающих [1, 5] дифракционных решеток, разделенных плоскопараллельным слоем свободного пространства. Слой свободного пространства – простейший фильтр пространственных частот [6, 7], и поэтому СТ – это фильтр не только временных, но и пространственных частот [8, 9].

Отметим, что в СТ с пропускающими дифракционными решетками световая волна падает по нормали на плоскопараллельный слой

свободного пространства, т. е. это идеальный объект для описания его работы методами фурье-оптики [6, 7]. СТ же с отражающими решетками описать несколько сложнее, поскольку в ней световая волна падает на плоскопараллельный слой свободного пространства под неким углом. В данной работе авторы ограничились описанием СТ с преломляющими дифракционными решетками, но в дальнейшем намерены исследовать и случай СТ с отражающими дифракционными решетками.

Ультракороткий лазерный импульс обладает широким частотным спектром, и поэтому тонкий лазерный пучок, который переносит ультракороткий импульс, можно рассматривать как входной полихроматический световой луч ( $ПЛ_{in}$ ). В этом идеальном случае  $ПЛ_{in}$  преобразуется СТ в “пространственный чирп” (ПЧ) [10] – одномерный пучок параллельных квази-монохроматических лучей разных длин волн, каждый из которых параллелен исходному полихроматическому лучу. Согласно принципу неопределенности, длительность этих квази-монохроматических волн в ПЧ гораздо больше длительности входного ультракороткого импульса.

Заметим, что в реальном случае при увеличении толщины  $D$  лазерного пучка соседние

квазимонохроматические лучи ПЧ накладываются друг на друга, что расширяет частотный спектр лучей в пространственном чирпе и, следовательно, укорачивает их длительность.

Используя теорию пространственной фильтрации, рассмотрим влияние толщины  $D$  лазерного пучка на минимальную длительность импульса в ПЧ.

Помимо чисто научного интереса, знание минимальной длительности импульса в ПЧ имеет и практическое значение, поскольку именно она определяет интенсивность излучения падающего на вторую решетку СТ, т. е. исходя из этой интенсивности можно рассчитывать лучевую прочность этой решетки.

## 1. Система Трейси

Рассмотрим СТ, состоящую из слоя свободного пространства, ограниченного парой одинаковых параллельно расположенных пропускающих дифракционных решеток ДР1 и ДР2 с постоянной  $d$  [5] (рис. 1). Если ПЛ<sub>in</sub> падает по нормали в точку  $F$  первой дифракционной решетки ДР1, то эта решетка отклонит  $j$ -ю монохроматическую компоненту луча с длиной волны  $\lambda_j$  на угол дифракции  $\theta_j$

$$\sin\theta_j = \pm \lambda_j/d. \quad (1)$$

(В дисперсионных линиях задержки обычно используют первый порядок дифракции.) Таким образом, первая дифракционная решетка ДР1 преобразует ПЛ<sub>in</sub> в одномерный гомоцентрический пучок монохроматических лучей с центром в точке  $F$ . Согласно принципу обратности [5], после дифракции на второй дифрак-

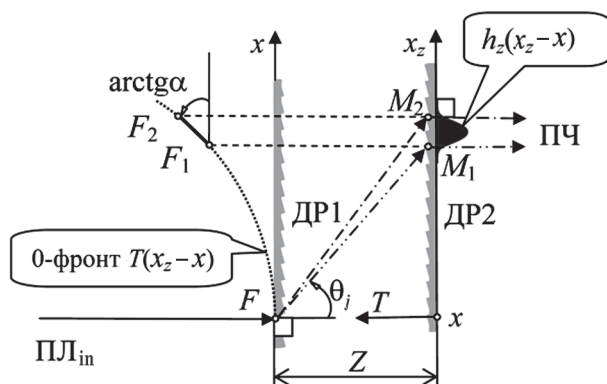


Рис. 1. Аппаратная функция  $h_z(x_z - x)$  и 0-фронт  $T(x_z - x)$  СТ в координатной системе “время задержки  $T$  – смещение  $x_z - x$ ”.

ционной решетке ДР2 этот гомоцентрический пучок превратится в ПЧ (рис. 1) [8, 9].

Заметим, что смещение монохроматического светового луча в ПЧ относительно продолжения входного луча, т. е.  $x_z - x$ , однозначно определяется длиной волны  $\lambda_j$ . Поэтому ось  $x_z$ , пересекающую ПЧ, можно использовать как естественную (но не однородную) шкалу длин волн (рис. 1). Смещение  $x_z - x$  можно отградуировать, пользуясь формулой дифракционной решетки (1) в угловых частотах  $\omega_j = 2\pi c/\lambda_j$

$$\begin{aligned} x_z - x &= Z \tan\theta_j = Z \tan\left[\arcsin\left(\Lambda c/\omega_j\right)\right] = \\ &= Z\left(\Lambda c/\omega_j\right) / \sqrt{1 - \left(\Lambda c/\omega_j\right)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $Z$  – расстояние между дифракционными решетками,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\Lambda \equiv 2\pi/d$  – пространственная частота дифракционной решетки.

Если пренебречь толщиной преломляющих дифракционных решеток, то в СТ лазерное излучение распространяется в свободном пространстве. Поэтому временная задержка монохроматической компоненты ультракороткого импульса пропорциональна длине отрезка  $FM_j$  (рис. 1). Разные компоненты ультракороткого импульса проходят разные отрезки  $FM_j$ . Проще сравнивать длины отрезков, расположенных параллельно. Поэтому воспользуемся методом развертки [9], суть которого в продолжении каждого из квазимонохроматических лучей ПЧ от точки  $M_j$  в обратном направлении до точки  $F_j$ , удаленной на то же расстояние от точки  $M_j$ , что и точка  $F$ :  $|F_jM_j| = |FM_j|$ . При изменении длины волны точка  $M_j$  движется вдоль второй дифракционной решетки и множество точек  $F_j$  формирует кривую, которую можно назвать “фронтом импульса нулевой фазы” [9] или, короче, “0-фронтом”.

Поскольку  $|F_jM_j| = Z/\cos\theta_j$ , соответствующую временную задержку СТ легко рассчитать по формуле [5]

$$T_j = Z/(c\cos\theta_j). \quad (3)$$

Таким образом, 0-фронт в системе координат “время задержки  $T$  – смещение  $(x_z - x)$ ” (рис. 1) является естественной характеристикой дисперсии СТ.

## 2. СТ как фильтр пространственных частот

Отметим, что СТ изопланарна, т. е. инвариантна по отношению к сдвигу (рис. 2): сдвиг

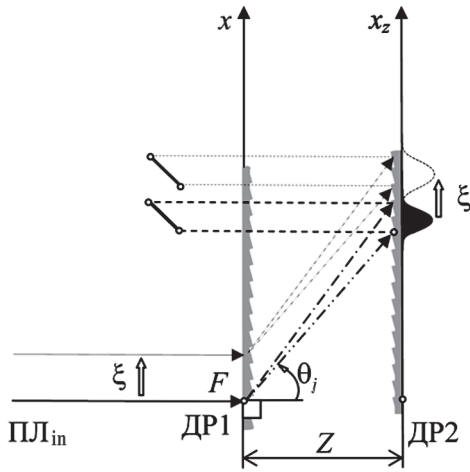


Рис. 2. СТ как изопланарная система.

“точечного” входного воздействия на величину  $\xi$  вызывает точно такой же сдвиг реакции системы. В СТ “точечная” входная нагрузка – это  $ПЛ_{in}$ , направленный в точку  $x$  первой дифракционной решетки, а реакция системы – возникающие при этом “0-фронт”  $T(x_z - x)$  и распределение освещенности  $h_z(x_z - x)$  по плоскости второй дифракционной решетки  $\{x_z\}$  [8], которую можно назвать аппаратной функцией СТ [11] (рис. 1, 2).

Вычислим аппаратную функцию СТ  $h_z(x_z - x)$ . В скалярном приближении (пренебрегая поляризацией) монохроматическую компоненту волнового пучка (пучка параллельных  $ПЛ_{in}$ ) с угловой частотой  $\omega$ , падающего на СТ, можно описать либо распределением комплексной амплитуды по плоскости первой дифракционной решетки  $U_{in}(x; \omega)$ , либо соответствующим спектром пространственных частот  $\tilde{U}_{in}(p; \omega)$ . Оба способа эквивалентны, поскольку связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Фурье.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{in}(p; \omega) &\equiv F_{x \rightarrow p} \{U_{in}(x; \omega)\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \{U_{in}(x; \omega)\} \exp\{-ipx\} dx, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} U_{in}(x; \omega) &\equiv F_{p \rightarrow x}^{-1} \{\tilde{U}_{in}(p; \omega)\} \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{U}_{in}(p; \omega)\} \exp\{ipx\} dp, \end{aligned} \quad (4b)$$

где  $p$  – пространственная частота.

Первая дифракционная решетка ДР1 модулирует падающую волну [6, 7], а модуляционная функция синусоидальной дифракционной решетки равна  $m(x) = \exp\{i\Lambda x\}$ . Поэтому, согласно теореме о сдвиге [6, 7], спектр пространственных частот в волновом пучке, прошедшем первую дифракционную решетку ДР1, равен

$$\tilde{U}^{DR1}(p; \omega) = \tilde{U}_{in}(p - \Lambda; \omega). \quad (5)$$

В современной оптике и радиотехнике для описания преобразований оптических сигналов широко используется теория функции распределения Вигнера (*Wigner distribution function*, WDF) [2, 12]. WDF волнового пучка (5) легко вычислить по формуле

$$\begin{aligned} W^{DR1}(x, p; \omega) &\equiv \\ &\equiv F_{\Delta p \rightarrow x}^{-1} \left\{ \left\langle \tilde{U}^{DR1} \left( p + \frac{\Delta p}{2}; \omega \right) \tilde{U}^{DR1} \left( p - \frac{\Delta p}{2}; \omega \right) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Естественно предположить, что WDF этого волнового пучка факторизуется по независимым переменным  $x$ ,  $p$  и  $\omega$ , т. е. с учетом равенства (5) WDF волнового пучка примет вид

$$W^{DR1}(x, p; \omega) = M(x) \delta(p - \Lambda) K(\omega), \quad (7)$$

где  $M(x) \equiv \int_R \langle U_{in}(x; \omega) U_{in}^*(x; \omega) \rangle d\omega$  – распределение интенсивности лазерного пучка по плоскости первой дифракционной решетки в сечении,  $K(\omega)$  – частотный спектр ультракороткого импульса.

Между дифракционными решетками расположен плоскопараллельный слой свободного пространства [6, 7], который преобразует входную комплексную амплитуду световой волны за первой дифракционной решеткой  $U^{DR1}(x, \omega)$  в комплексную амплитуду световой волны  $U^{DR2}(x_z, \omega)$ , падающую на вторую дифракционную решетку. В пространственной области это преобразование описывается оператором свертки

$$U^{DR2}(x_z; \omega) = \int_R U^{DR1}(x; \omega) H_{\omega}(x_z - x) dx, \quad (8a)$$

а в области пространственных частот – произведением спектров этих комплексных амплитуд

$$\tilde{U}^{DR2}(p; \omega) = \tilde{U}^{DR1}(p; \omega) \tilde{H}_{\omega}(p). \quad (8b)$$

Здесь

$$H_{\omega}(x_z - x) = F_{p \rightarrow (x_z - x)}^{-1} \{ \tilde{H}_{\omega}(p) \} \quad (9a)$$

– импульсная характеристика и

$$\begin{aligned}\tilde{H}_\omega(p) &= \exp \left\{ iZ \sqrt{k^2 - p^2} \right\} = \\ &= \exp \left\{ iZ \sqrt{(\omega/c)^2 - p^2} \right\}\end{aligned}\quad (96)$$

– частотная передаточная функция слоя свободного пространства толщиной  $Z$ ,  $k = \omega/c$  – волновое число.

В представлении WDF (6) фильтр описывается выражением, которое объединяет его пространственное (8а) и частотное (8б) описания [13, 14]

$$\begin{aligned}W^{\text{DP}2}(x_z, p; \omega) &= \\ &= \int_R W^{\text{DP}1}(x, p; \omega) W_\omega^H(x_z - x, p) dx,\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}W_\omega^H(x_z - x, p) &= \\ &= F_{\Delta p \rightarrow (x_z - x)}^{-1} \left\{ \tilde{H}_\omega \left( p + \frac{\Delta p}{2} \right) \tilde{H}_\omega^* \left( p - \frac{\Delta p}{2} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

Поскольку передаточная функция свободного пространства чисто фазовая функция (96), то последнее выражение примет вид

$$\begin{aligned}W_\omega^H(x_z - x, p) &= \delta \left( x_z + Z \partial \tilde{H}_\omega / \partial p \right) = \\ &= \delta \left( x_z - Z p / \sqrt{(\omega/c)^2 - p^2} \right).\end{aligned}\quad (12)$$

Заметим, что распределение освещенности по поверхности второй дифракционной решетки  $E(x_z)$  такое же, как и распределение освещенности по любому поперечному сечению ПЧ на выходе СТ. Его можно вычислить, проинтегрировав формулу (10) по временным и пространственным частотам

$$h \left( \frac{x_z - x}{Z} \right) = K \left( c \Lambda \sqrt{[Z/(x_z - x)]^2 + 1} \right) \left| c \Lambda / \left\{ \left( \frac{x_z - x}{Z} \right)^3 \left( \sqrt{[Z/(x_z - x)]^2 + 1} \right) \right\} \right| \quad (17)$$

– нормированная аппаратная функция СТ, однозначно связанная с частотным спектром исходного ультракороткого импульса  $K(\omega)$ .

Зная аппаратную функцию, можно, например, оптимизировать размеры дифракционных решеток СТ [8]. Но в настоящей работе она используется для исследования влияния толщины  $D$  лазерного пучка на длительность импульса в ПЧ.

Предположим, что распределение интенсивности в падающем полихроматическом пучке  $M(x)$  равномерно, т. е. его поперечное сечение занимает область (рис. 3а)

$$(x_0 - D/2, x_0 + D/2). \quad (18)$$

В этом случае, согласно формуле (14), освещенность в произвольной точке  $x_z$  второй дифракционной решетки вычисляется как

$$E(x_z) = \int_{x_0 - D/2}^{x_0 + D/2} h_z(x_z - x) dx. \quad (19)$$

Используя замену переменной  $x_z = x_0 + \zeta$  и масштабное подобие (16), выражение (19) можно переписать так:

$$\begin{aligned}E(x_z) &\equiv \iint_{R^2} W^{\text{DP}2}(x_z, p; \omega) dp d\omega = \\ &= \iiint_{R^3} W^{\text{DP}1}(x, p; \omega) W_\omega^H(x_z - x, p) dx dp d\omega.\end{aligned}\quad (13)$$

При подстановке выражений (7) и (12) интеграл (13) примет вид свертки

$$E(x_z) = \int_R M(x) h_z(x_z - x) dx, \quad (14)$$

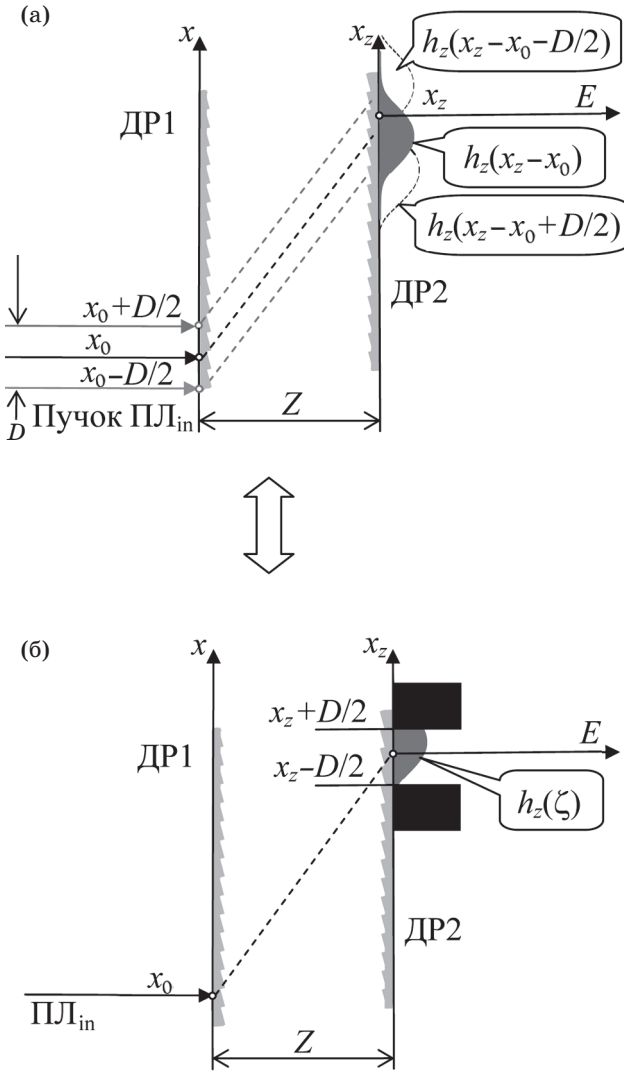
где

$$\begin{aligned}h_z(x_z - x) &= \\ &= \iint_{R^2} K(\omega) \delta(p - \Lambda) \delta \left( x_z - x - Z \frac{p}{\sqrt{(\omega/c)^2 - p^2}} \right) dp d\omega = \\ &= \int_R K(\omega) \delta \left( x_z - x - Z \frac{1}{\sqrt{(\omega/\Lambda c)^2 - 1}} \right) d\omega\end{aligned}\quad (15)$$

– искомая аппаратная функция СТ. Введем новую безразмерную переменную  $v \equiv 1 / \sqrt{[(\omega/\Lambda c)^2 - 1]}$ . В новых переменных выражение (15) примет вид

$$\begin{aligned}h_z(x_z - x) &= \\ &= \int_R K \left( c \Lambda \sqrt{(1/v)^2 + 1} \right) \delta(x_z - x - Zv) \left| \frac{d\omega}{dv} \right| dv = \\ &= \frac{1}{Z} h \left( \frac{x_z - x}{Z} \right),\end{aligned}\quad (16)$$

где



**Рис. 3.** Увеличение диаметра  $D$  входного пучка в СЛ (а) эквивалентно увеличению полосы пропускания с центром в точке  $x_z$  (б), вырезающей из аппаратной функции  $h_z(\zeta)$  ту ее часть, которая определяет спектр излучения в точке  $x_z$  ПЧ.

$$E(x_0 + \zeta) = \int_{(x_z - D)/2}^{(x_z + D)/2} h_z(\zeta) d\zeta. \quad (20)$$

Последнее выражение можно графически интерпретировать таким образом, что диаметр  $D$  входного пучка как бы определяет ширину полосы пропускания с центром в точке  $x_z$ , вырезающей из аппаратной функции СЛ  $h_z(\zeta)$  ту ее часть (рис. 3б), которая участвует в формировании освещенности в точке  $x_z$ .

Согласно уравнению (17), нормированная аппаратная функция СЛ  $h(x)$  однозначно связана с частотным спектром исходного ультракоро-

роткого импульса  $K(\omega)$ , причем угловая частота  $\omega$  связана с безразмерной переменной  $v$  соотношением  $\omega(v) \equiv c\Lambda\sqrt{1 + (1/v)^2}$  (рис. 4а), поэтому выражение (20а) можно переписать так:

$$E(x_0 + Zv) = \frac{c\Lambda\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v + D/2Z}\right)^2}}{c\Lambda\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v - D/2Z}\right)^2}} K(\omega) d\omega. \quad (21)$$

Таким образом, при формировании освещенности в точке  $x_z$  ПЧ СЛ работает как полосовой частотный фильтр.

Если предположить, что спектр импульса входной волны  $K(\omega)$  равномерен в полосе частот

$$(\omega_-, \omega_+) \equiv (\omega_0 - \sigma_\omega^{\text{in}}/2, \omega_0 + \sigma_\omega^{\text{in}}/2), \quad (22)$$

то полоса частот спектра импульса в ПЧ равна пересечению полос частот СЛ (21) и входного импульса (22) (рис. 4б)

$$\left[ c\Lambda\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v + D/2Z}\right)^2}, c\Lambda\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v - D/2Z}\right)^2} \right] \cap (\omega_0 - \sigma_\omega^{\text{in}}/2, \omega_0 + \sigma_\omega^{\text{in}}/2). \quad (23)$$

Таким образом, ширина спектра излучения в ПЧ равна

$$\sigma_\omega^{\text{chirp}}(v) = \min \left[ c\Lambda\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v - D/2Z}\right)^2}, \omega_0 + \sigma_\omega^{\text{in}}/2 \right] - \max \left[ c\Lambda\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v + D/2Z}\right)^2}, \omega_0 - \sigma_\omega^{\text{in}}/2 \right]. \quad (24)$$

Распределение ширины спектра излучения по сечению ПЧ определяют абсциссы точек 1 и 2 (рис. 4б, в)

$$v_1 = \frac{D}{2Z} + \frac{1}{\sqrt{\Omega_+^2 - 1}} \quad (25a)$$

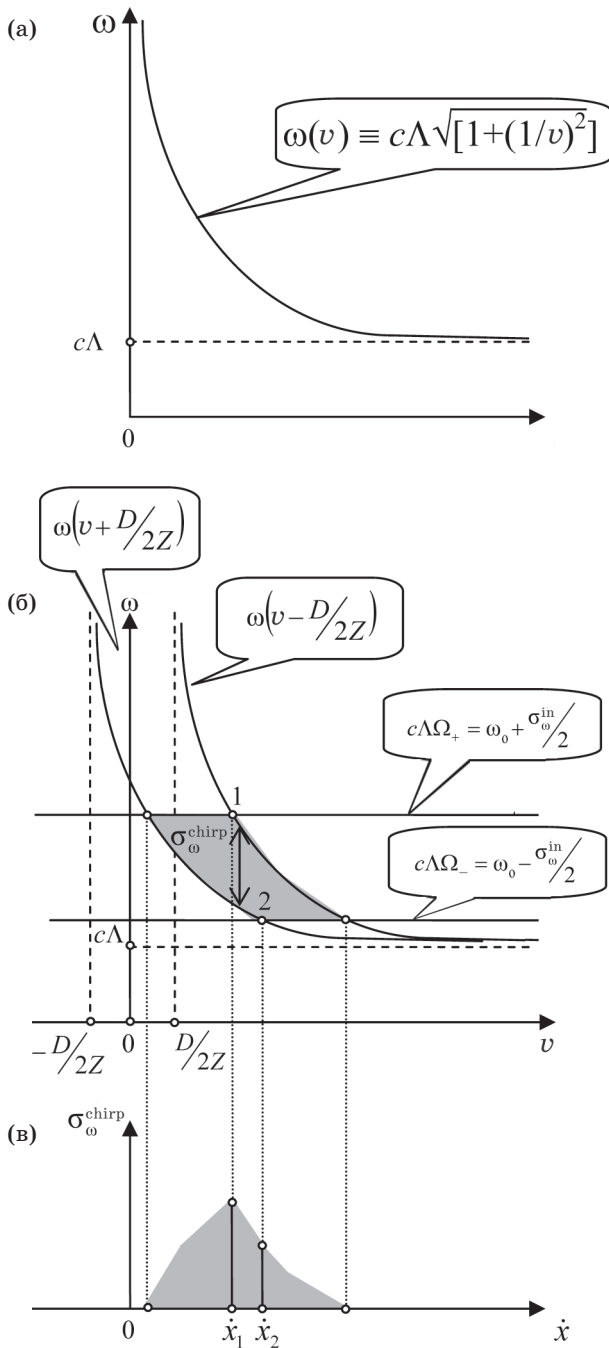
и

$$v_2 = -\frac{D}{2Z} + \frac{1}{\sqrt{\Omega_-^2 - 1}}, \quad (25б)$$

где

$$\Omega_\pm \equiv \frac{\omega_0 + \sigma_\omega^{\text{in}}/2}{c\Lambda} = \frac{d}{\lambda_{\text{min}}}$$





**Рис. 4.** График функции  $\omega(v) \equiv c\Lambda\sqrt{1+(1/v)^2}$  (а) и область допустимых частот в ПЧ (б). Распределение ширины спектра импульса  $\sigma_{\omega}^{\text{chirp}}$  по сечению ПЧ (в).

и

$$\Omega_- \equiv \frac{\omega_0 - \sigma_{\omega}^{\text{in}}/2}{c\Lambda} = \frac{d}{\lambda_{\text{max}}},$$

а  $(\lambda_{\text{min}}, \lambda_{\text{max}})$  – ширина спектра входного импульса в длинах волн.

Если  $v_1 \geq v_2 \Leftrightarrow D/Z \geq 1/\sqrt{(\Omega_-^2 - 1)} - 1/\sqrt{(\Omega_+^2 - 1)}$ , то максимальная ширина спектра импульса в интервале  $[v_1, v_2]$  ПЧ та же, что

и у входного импульса, т. е. постоянна и не зависит от диаметра входного пучка  $D$ .

Если же

$$v_1 < v_2 \Leftrightarrow D/Z < 1/\sqrt{(\Omega_-^2 - 1)} - 1/\sqrt{(\Omega_+^2 - 1)},$$

то максимальная ширина спектра импульса в интервале  $[\dot{x}_1, \dot{x}_2]$  ПЧ зависит от диаметра входного пучка  $D$  и достигает своего максимального значения в точке  $v_1$  (25а)

$$\begin{aligned} \max \sigma_{\omega}^{\text{chirp}} &= c\Lambda \left( \Omega_+ - \sqrt{1 + 1/[\dot{x}_1 + D/2Z]^2} \right) = \\ &= c\Lambda \left( \Omega_+ - \sqrt{1 + 1/[1/\sqrt{\Omega_+^2 - 1} + D/2Z]^2} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Для оценочных расчетов предположим, что постоянная дифракционной решетки  $d = 1000$  нм, а титан-сапфировый лазер генерирует ультракороткие импульсы длительностью 12 фс на длине волны  $\lambda_0 = 780$  нм, т. е. спектр импульса занимает диапазон длин волн от  $\lambda_{\text{min}} = 740$  нм до  $\lambda_{\text{max}} = 820$  нм. В этом случае  $\Omega_+ \approx 1,35$ ,  $\Omega_- \approx 1,22$ , и при условии, что  $D/Z < 1/\sqrt{(\Omega_-^2 - 1)} - 1/\sqrt{(\Omega_+^2 - 1)} \approx 0,33$ , ширина спектра импульса (Гц) в пространственном чирпе достигает своего максимального значения

$$\begin{aligned} \max \sigma_{\omega}^{\text{chirp}} &\approx 1872 \times 10^{12} \times \\ &\times \left( 1,35 - \sqrt{1 + 1/[1,1 + D/2Z]^2} \right) < 174 \times 10^{12} \end{aligned}$$

в точке  $v_1 = 1/\sqrt{(\Omega_+^2 - 1)} \approx 1,1$ .

### СТ как фильтр временных частот

Любая дисперсионная линия задержки, в частности СТ, – это линейная, инвариантная по отношению к сдвигу во времени система, т. е. фильтр временных частот, преобразующий спектр входного сигнала

$$\tilde{u}^{\text{in}}(\omega) \equiv \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ u^{\text{in}}(t) \} \quad (27a)$$

в спектр выходного сигнала

$$\tilde{u}^{\text{out}}(\omega) \equiv \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} \{ u^{\text{out}}(t) \} \quad (27b)$$

путем перемножения с частотной передаточной функцией  $f(\omega)$ [2]

$$\tilde{u}^{\text{out}}(\omega) = \tilde{u}^{\text{in}}(\omega) f(\omega). \quad (28)$$

Как отмечалось выше, фильтрующие свойства особенно удобно описывать с помощью WDF (6). По аналогии с выражением (10) фильтр временных частот описывается выражением

$$W^{\text{out}}(t', \omega) = \int_R W^{\text{in}}(t, \omega) W^f(t' - t, \omega) dt, \quad (29)$$

где

$$W^f(t'-t, \omega) = \mathbf{F}_{\Delta\omega \rightarrow (t'-t)}^{-1} \left\{ f\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) f^*\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right) \right\}. \quad (30)$$

Для временного фильтра важно выполнение принципа причинности, согласно которому импульсное воздействие, описываемое дельта-функцией  $\delta(t - t_0)$ , вызывает отклик системы и проявляется в течение некоторого времени после  $t_0$ , но полностью отсутствует при  $t < t_0$  [15], т. е.

$$W^f(t'-t, \omega) = \begin{cases} \neq 0, & \text{если } t > t_0 \\ 0, & \text{если } t \leq t_0 \end{cases}. \quad (31)$$

В общем случае ширина спектра импульса  $\sigma_\omega$  и его длительность  $\sigma_t$  связаны неравенством Гейзенберга

$$\sigma_\omega \sigma_t \geq C, \quad (32)$$

где  $C$  – некая постоянная. Существуют импульсы, для которых неравенство (32) превращается в равенство. Такие импульсы называются спектрально ограниченными.

Направим на вход фильтра ультракороткий причинный спектрально ограниченный импульс, WDF которого имеет вид прямоугольника [2] (рис. 5, 6)

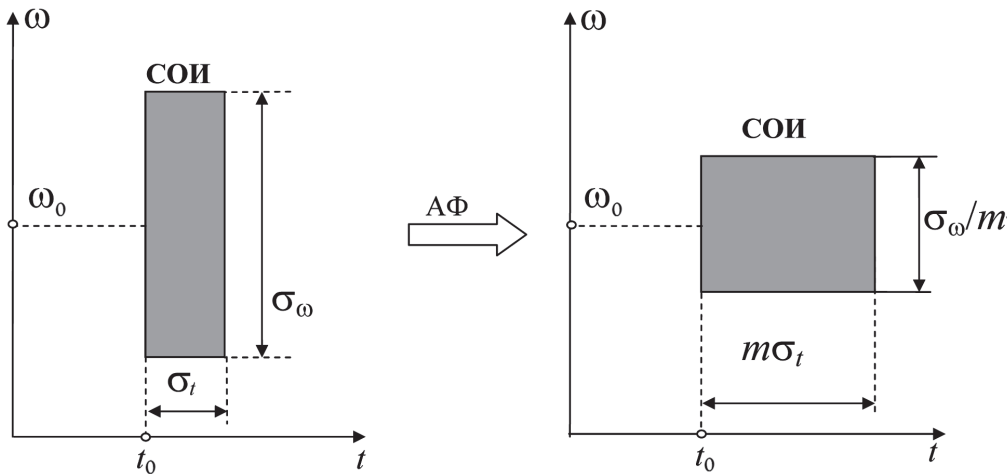


Рис. 5. Преобразование СОИ полосовым амплитудным фильтром (АФ).

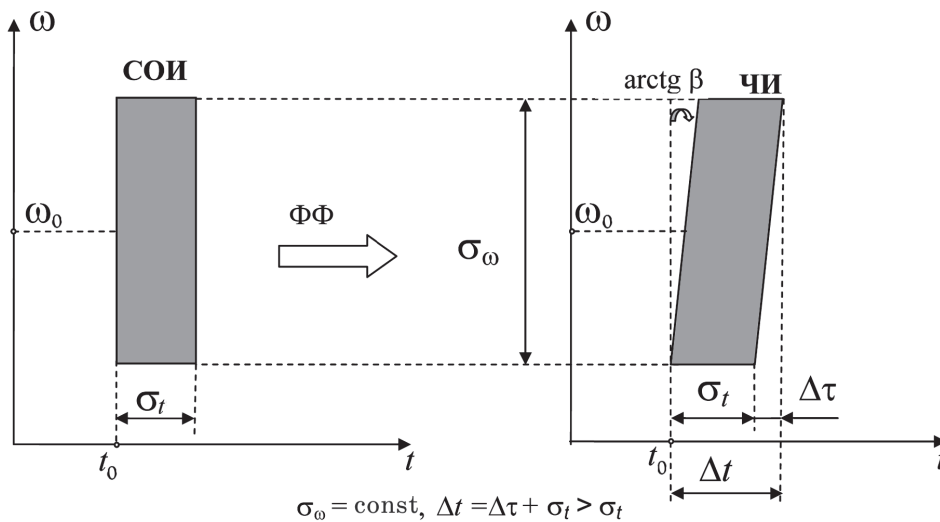


Рис. 6. Преобразование СОИ квадратичным фазовым фильтром (ФФ).

$$W^{\text{in}}(t-t_0, \omega-\omega_0) = \text{Rect}\left(\frac{t-t_0}{\sigma_t}\right) \text{rect}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\sigma_\omega}\right). \quad (33)$$

Здесь

$$\text{Rect}(t) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{если } t < 0 \text{ и } t > 1 \end{cases}$$

$$\text{rect}(\omega) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } |\omega| < 1/2 \\ 0, & \text{если } |\omega| > 1/2 \end{cases}$$

Фильтр может быть как чисто амплитудным (рис. 5), так и чисто фазовым (рис. 6).

Амплитудный полосовой фильтр уменьшает ширину спектра импульса с  $\sigma_\omega^{\text{in}}$  до  $\sigma_\omega^{\text{cirp}}$ , не нарушая условия его спектральной ограниченности. В этом случае, согласно принципу неопределенности (32), отношение базовой длительности импульса  $\sigma_t^{\text{cirp}}$  в пространственном чирпе к длительности входного импульса  $\sigma_t^{\text{in}}$  обратно пропорционально отношению ширины полос частот соответствующих спектров  $\sigma_\omega^{\text{cirp}}$  и  $\sigma_\omega^{\text{in}}$

$$\frac{\sigma_t^{\text{cirp}}}{\sigma_t^{\text{in}}} \approx \frac{\sigma_\omega^{\text{in}}}{\sigma_\omega^{\text{cirp}}}. \quad (34)$$

Если фильтр уменьшает полосу частот входного спектрально ограниченного прямоугольного импульса в  $m$  раз, то согласно пропорции (32), его длительность увеличится в  $m$  раз, но согласно принципу причинности, условие отсутствия сигнала при  $t < t_0$  остается неизменным (рис. 5).

Идеальная дисперсионная линия задержки – это фильтры с чисто фазовой частотной передаточной функцией [2]

$$f(\omega) = \exp\{-i\varphi(\omega)\}, \quad (35)$$

где  $\varphi(\omega) = \omega T$ ,  $T$  – фазовая задержка монохроматической волны с частотой  $\omega$ .

В случае фазовой передаточной функции (35) выражение (30) примет вид

$$W^f(t'-t, \omega) \cong \delta\left(t'-t - \frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega}\right), \quad (36)$$

и, следовательно, подставляя выражение (36) в формулу (29), получим

$$W^{\text{out}}(t', \omega) = W^{\text{in}}\left(t' - \frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega}, \omega\right). \quad (37)$$

Считая, что полоса частот импульса мала, разложим фазовую функцию  $\varphi(\omega)$  в окрестности несущей частоты  $\omega_0$  в ряд Тейлора

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + t_0(\omega - \omega_0) + 1/2\beta(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (38)$$

Тогда, если ограничиться членами второго порядка, выражение (37) примет вид (рис. 6)

$$W^{\text{out}}(t'-t_0, \omega - \omega_0) \approx W^{\text{in}}[t'-t_0 - \beta(\omega - \omega_0), \omega], \quad (39)$$

где  $t_0$  – центральный момент времени,  $\beta$  – дисперсия групповой задержки (*group delay dispersion*, GDD [1], *frequency-sweep rate* [4]).

Согласно уравнению (39), квадратичный фазовый фильтр (ФФ), т. е. идеальная дисперсионная линия задержки преобразует прямоугольный импульс в импульс в виде параллелограмма, т. е. не меняет полосу частот исходного спектрально ограниченного прямоугольного импульса ( $\sigma_\omega = \text{const}$ ), но увеличивает его длительность за счет сдвига по временной оси (рис. 6). Этот процесс называется временным чирпированием, а полученный в результате этого процесса импульс – чирпированным.

Заметим, что если  $\alpha$  – наклон фронта импульса нулевой фазы  $cT$  по отношению к оси  $x_z - x$  в середине частотного диапазона ультракороткого импульса в точке  $\omega_0$  (рис. 1), то согласно формулам (2) и (3)

$$\alpha \equiv c(dT/d\theta)/\left[d(x_z - x)/d\theta\right]_{\theta(\omega_0)} = c \frac{Z \sin\theta \cos^2\theta}{\cos^2\theta} \frac{1}{Z} \Big|_{\theta(\omega_0)} = c \sin\theta(\omega_0) = c^2 \Lambda/\omega_0 \quad (40)$$

или, если перейти от частот к длинам волн,

$$\alpha = c\lambda_0/d. \quad (41)$$

Отметим, что дисперсия групповой задержки  $\beta$  (рис. 6) связана с наклоном фронта импульса  $\alpha$  соотношениями

$$\beta \equiv \frac{dT}{d\omega} \Big|_{\omega_0} = \frac{\alpha}{c} \left| \frac{d(x_z - x)}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \left| \left( -\alpha Z \Lambda / \omega_0^2 \right) \left[ 1 - (\Lambda c / \omega_0)^2 \right]^{-3/2} \right|. \quad (42)$$

## Компрессор – двойная СТ

СТ превращает ПЛ<sub>in</sub> в ПЧ. Это неудобно, так как идеальный компрессор должен превращать ПЛ<sub>in</sub>, несущий частотно ограниченный лазерный импульс, в выходной полихроматический луч (ПЛ<sub>out</sub>), несущий отрицательный



временной чирп. Согласно принципу обратности, такой компрессор можно создать из двух одинаковых СТ, размещенных тыльными сторонами друг к другу (рис. 7). Дисперсия такого компрессора вдвое больше дисперсии системы Трейси, т. е. у одинарной СТ GDD равна  $\beta$ , а у двойной СТ –  $2\beta$ .

Отметим, что длительность чирпированного импульса  $\Delta t$  (возникающего на выходе двойной СТ) есть сумма базовой длительности  $\sigma_t = C/\sigma_\omega$  и дополнительной длительности  $\Delta\tau \equiv 2\beta\sigma_\omega$  (см. рис. 7)

$$\Delta t \equiv \sigma_t + \Delta\tau = C/\sigma_\omega + 2\beta\sigma_\omega. \quad (43)$$

Двойная СТ как идеальная дисперсионная линия задержки увеличивает суммарное время импульса, но не влияет на базовую длительность сигнала  $\sigma_t$ .

Рассмотрим длительность импульса в пространственном чирпе между двумя СТ. В этом случае надо учитывать не только фазовую, но и амплитудную частотную характеристику СТ, поскольку ширина спектра  $\sigma_\omega^{\text{chirp}}$  в каждой точке пространственного чирпа зависит от толщины  $D$  падающего лазерного пучка (рис. 4б). В пространственном чирпе длительность чирпированного импульса  $\Delta t^{\text{chirp}}$  есть сумма базовой длительности  $\sigma_t^{\text{chirp}}$ , определяемой из уравне-

ния (34), и дополнительной длительности  $\Delta\tau \equiv \beta\sigma_\omega^{\text{chirp}}$  (рис. 7)

$$\Delta t^{\text{chirp}} = \sigma_t^{\text{chirp}} + \Delta\tau = \sigma_t^{\text{in}} \sigma_\omega^{\text{in}} / \sigma_\omega^{\text{chirp}} + \beta\sigma_\omega^{\text{chirp}}. \quad (44)$$

Минимальную длительность лазерного импульса на решетке легко найти из формулы (44):  $\min \Delta t^{\text{chirp}} = 2\sqrt{\beta C}$ . Используя выражение (44), можно показать, что минимальная длительность лазерного импульса на решетке будет составлять несколько начальных длительностей импульса для наших параметров.

## Выводы

Показано, что исчерпывающими характеристиками СТ, состоящей из преломляющих дифракционных решеток, являются ее реакции на точечное воздействие ( $\text{ПЛ}_{\text{in}}$ ), а именно: 0-фронт, характеризующий СТ как дисперсионную линию задержки, и аппаратная функция, характеризующая СТ с энергетической точки зрения. Используя свойства WDF, получена формула, описывающая связь аппаратной функции СТ с ее конструктивными параметрами – расстоянием между решетками, их периодом, а также шириной и частотным спектром входного лазерного пучка, несущего ультра-

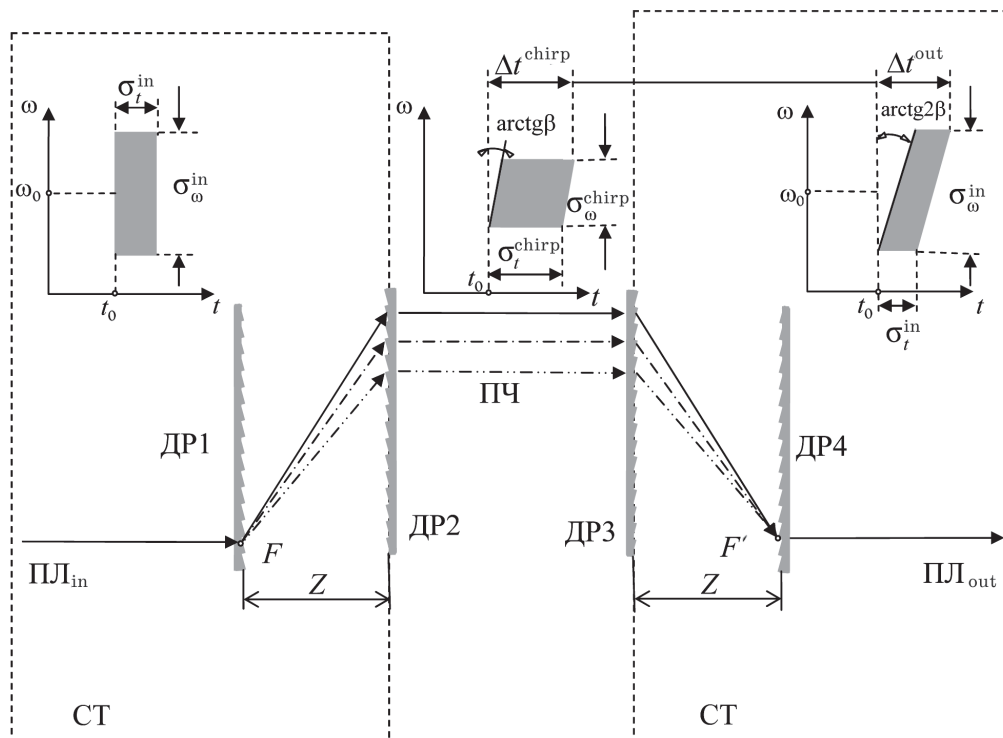


Рис. 7. Четырехрешеточный компрессор – двойная СТ.

короткий импульс. Предложен способ расчета ширины спектра и длительности излучения в сечении ПЧ. Минимальная длительность излучения в ПЧ – один из важнейших параметров

СТ, определяющий предельную лучевую прочность ее второй дифракционной решетки .

Настоящая работа частично поддержана грантом РФФИ 09-02-12193 офи\_м.

\* \* \* \* \*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Walmsley I., Waxer L., Dorrer C.* The role of dispersion in ultrafast optics // Review of Scientific Instruments. 2001. V. 72. № 1. P. 1–29.
2. *Гитин А.В.* Применение функции Вигнера и матричной оптики для описания изменения формы лазерных УКИ при прохождении их через линейные оптические системы // Квант. электрон. 2006. Т. 36. № 4. С. 376–382.
3. *Theacy E.B.* Compression of picosecond light pulse // Phys. Lett. 1968. V. 28A. № 1. P. 34–35.
4. *Theacy E.B.* Optical pulse compression with diffraction grating // IEEE Journ. Quant. Electron. 1969. QE-5. № 9. P. 454–458.
5. *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чирков А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 310 с.
6. *Литвиненко О.Н.* Основы радиооптики. Киев: Техника, 1974. 206 с.
7. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с. *Goodman J.W.* Introduction to Fourier Optics. N. Y.: McGraw-Hill, 1968.
8. *Гитин А.В.* Компрессор лазерных импульсов // Фотоника. 2009. № 5. С. 8–13.
9. *Gitin A.V.* Zero-distance pulse front as a group delay characteristic of the two-grating compressor // Opt. Commun. 2010. V. 283. P. 1090–1095.
10. *Gu X., Akturk S., Trebino R.* Spatial chirp in ultrafast optics // Opt. Commun. 2004. V. 242. P. 599–604.
11. *Ллойд Дж.* Системы тепловидения. М.: Мир, 1978. 414 с. *Lloyd J.M.* Thermal Imaging System. Plenum, 1975.
12. Wigner distribution function. From Wikipedia, the free encyclopedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Wigner\\_distribution\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Wigner_distribution_function)
13. *Гитин А.В.* Процесс формирования изображения при частично когерентном освещении // Труды ГОИ. 1988. Т. 70. В. 204. С. 4–12.
14. *Gitin A.V.* Image generation with partially coherent lighting // Proc. SPIE. 1993. V. 1978. P. 37–42.
15. *Хагедорн Р.* Причинность и дисперсионные соотношения // УФН. 1967. Т. 91. № 1. С. 151–160.