УДК 681.7.01

ОБОБЩЕННАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ АНАЛИЗ

 В. А. Зверев, доктор техн. наук; **И. Н. Тимощук**, канд. техн. наук

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: post_vaz@rambler.ru

Дано определение обобщенной параметрической модели оптической системы и проведен ее анализ. Результаты анализа позволяют обоснованно назначать допустимые отклонения конструктивных параметров оптической системы от номинальных значений при различных видах сборки оптических приборов.

Ключевые слова: *оптическая система, допустимые отклонения, параметры, модель, прибор, сборка.*

Коды OCIS: 200.0200, 220.0220.

Поступила в редакцию 17.03.2011.

Разработанная и изготовленная оптическая система должна удовлетворять заданным параметрам (свойствам) и характеристикам, к числу которых можно отнести следующие:

– фокусное расстояние,

– увеличение (поперечное, продольное или угловое) изображения предмета,

– передний рабочий отрезок – расстояние от предмета до первой поверхности оптической системы,

– задний рабочий отрезок – расстояние от оптической системы (от последней поверхности оптической системы) до плоскости изображения,

– положение апертурной диафрагмы в оптической системе,

– значения передней и задней числовой апертуры или относительное отверстие,

– линейное или угловое поле в пространстве предметов или изображений,

– характеристики качества изображения и т. п.

Значения этих параметров определяются конструктивными параметрами оптической системы: радиусами кривизны оптических поверхностей, показателями преломления разделяемых ими сред, толщинами линз и расстояниями (воздушными промежутками) между поверхностями линз, т. е. формально представляют собой функции значений этих параметров. Задача разработки оптической системы, в конечном счете, сводится к отысканию таких значений конструктивных параметров, при которых требуемые функции принимают заданные в пределах допустимых отклонений значения.

Параметрический синтез оптической системы, т. е. определение ее конструктивных параметров, начинается с разработки принципиальной схемы системы. Используя известные в геометрической оптике математические модели, вычисляют оптические силы компонентов системы, значения отрезков, определяющих положения и поперечные увеличения созданного изображения предмета, апертурные диафрагмы (входного и выходного зрачков) и т. д. Завершается параметрический синтез оптимизацией конструктивных параметров выбранной конструкции отдельных компонентов и системы в целом по тому или иному критерию качества изображения. Математическую модель, определяющую любую из функций конкретных значений конструктивных параметров, полученных в результате параметрического синтеза, будем называть параметрической моделью.

Аналитически в явном виде нелинейную взаимосвязь свойств и характеристик оптической системы с ее конструктивными параметрами удается выразить лишь в достаточно редких частных случаях. Поэтому в общем случае эту взаимосвязь можно представить в виде следующей системы уравнений [1]:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1=\Phi_1(p_1, p_2,\dots, p_k)\\ \Phi_2=\Phi_2(p_1, p_2,\dots, p_k)\\ -----------\\ \Phi_j=\Phi_j(p_1, p_2,\dots, p_k)\\ -----------\\ \Phi_m=\Phi_m(p_1, p_2,\dots, p_k)\end{array}\right\}, \qquad (1)$$

где Φ_1, Φ_2, ..., Φ_j, Φ_m – функции, определяющие те или иные свойства системы; p_1, p_2, ..., p_i, p_k – конструктивные параметры оптической системы. Значения функций, записанные в левой части уравнений (1), можно представить в виде суммы номинальных значений и их изменений вследствие изменения конструктивных параметров. Обозначая номинальные значения функций через Φ_{01}, Φ_{02}, ..., Φ_{0j}, Φ_{0m}, а их изменения – через $\Delta\Phi_1$, $\Delta\Phi_2$, ..., $\Delta\Phi_j$, $\Delta\Phi_m$ и используя аналогичные обозначения для конструктивных параметров, систему уравнений (1) можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1=\Phi_{01}+\Delta\Phi_1=\Phi_1(p_{01}+\Delta p_1, p_{02}+\Delta p_2,\dots, p_{0k}+\Delta p_k)\\ \Phi_2=\Phi_{02}+\Delta\Phi_2=\Phi_2(p_{01}+\Delta p_1, p_{02}+\Delta p_2,\dots, p_{0k}+\Delta p_k)\\ -----------\\ \Phi_j=\Phi_{0j}+\Delta\Phi_j=\Phi_j(p_{01}+\Delta p_1, p_{02}+\Delta p_2,\dots, p_{0k}+\Delta p_k)\\ -----------\\ \Phi_m=\Phi_{0m}+\Delta\Phi_m=\Phi_m(p_{01}+\Delta p_1, p_{02}+\Delta p_2,\dots, p_{0k}+\Delta p_k)\end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Возможные изменения функций Φ_1, Φ_2, ..., Φ_j, Φ_m не должны превышать допустимых значений, что равносильно соблюдению условий $|\Delta\Phi_1| \le \Delta_1$, $|\Delta\Phi_2| \le \Delta_2$, ..., $|\Delta\Phi_j| \le \Delta_j$, $|\Delta\Phi_m| \le \Delta_m$, где положительные величины Δ_1, Δ_2, ..., Δ_j, Δ_m можно рассматривать как допуски на отступления от заданных свойств системы.

Перенеся номинальные значения функций Φ_{01}, Φ_{02}, ..., Φ_{0j}, Φ_{0m} в правую часть уравнения (2), получим выражения, определяющие изменения этих функций в зависимости от изменения конструктивных параметров системы. Полагая величины $\Delta\Phi_j$ и Δp малыми, изменения функций можно заменить их полными дифференциалами, что позволяет заменить систему уравнений (2) системой уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l}d\Phi_1=\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial p_1}dp_1+\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial p_2}dp_2+\dots+\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial p_k}dp_k\\ d\Phi_2=\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial p_1}dp_1+\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial p_2}dp_2+\dots+\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial p_k}dp_k\\ ---------------------\\ d\Phi_m=\dfrac{\partial\Phi_m}{\partial p_1}dp_1+\dfrac{\partial\Phi_m}{\partial p_2}dp_2+\dots+\dfrac{\partial\Phi_m}{\partial p_k}dp_k\end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Зависимость изменения функций в малой области вблизи их номинальных значений при малых изменениях конструктивных параметров приближенно можно считать линейной. Тогда, заменяя в уравнениях (3) дифференциалы величин конечными разностями, получаем систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}\Delta\Phi_1\\ \Delta\Phi_2\\ \dots\\ \Delta\Phi_j\\ \dots\\ \Delta\Phi_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1i} & \cdots & q_{1k}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2i} & \cdots & q_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_{j1} & q_{j2} & \cdots & q_{ji} & \cdots & q_{jk}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mi} & \cdots & q_{mk}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta p_1\\ \Delta p_2\\ \dots\\ \Delta p_i\\ \dots\\ \Delta p_k\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где q_{ji} – коэффициент влияния, причем

$$q_{ji}=\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}.$$

Очевидно, что если $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \dots, = \Delta p_i = = \Delta p_k = 0$, то приращения функций $\Delta\Phi_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

При этом представляется вполне естественным принять $|\Delta\Phi_j| \le \Delta_j$ и, решив систему уравнений (4), найти допустимые значения изменений параметров p_i. Очевидно, что изменив одновременно знак найденных значений изменений параметров p_i, получим изменение знака приращения функций Φ_j. Если одновременно уменьшить в одно и то же число раз изменения параметров p_i, то во столько же раз изменится и приращение функций Φ_j. Эти соображения определяют принципиальную возможность группировать элементы оптической системы по соответствующим отклонениям конструктивных параметров и осуществлять так называемую селективную сборку. Однако при этом наряду с организационными проблемами возникают и технические. Так, например, отдельная линза оптической системы характеризуется значениями кривизны двух поверхностей, толщиной, показателем преломления и дисперсией материала, из которого она изготовлена. Отклонения этих параметров не зависят друг от друга, что определяет неоднозначность выбора признака группирования таких деталей. Формально этот признак можно конкретизировать, если, например, поверхность линзы обрабатывать под выбранные пробные стекла. Тогда при жестких требованиях к материалу линзы на отклонение соответствующей функции (или функций) будет влиять лишь ее толщина. Высокая трудоемкость организации селективной сборки оптических систем определяет эффективное применение ее лишь в редких частных случаях.

Задачу определения допустимых отклонений конструктивных параметров от номинальных значений можно решить следующим образом. Допустимое отклонение j-й функции разделим на ее допустимые отклонения, вызванные отклонением каждого i-го конструктивного параметра, что однозначно определяет допустимые отклонения конструктивных параметров. Обозначим $\Delta_i\Phi_j = \varphi_{ij}$, где $\Delta_i\Phi_j$ – допустимое отклонение j-й функции, вызванное отклонением i-го параметра. Представляется естественным разделить отклонение функции пропорционально коэффициентам влияния отклонений параметров [2], т. е.

$$\pm\varphi_{ji} = \frac{\Delta\Phi_j}{\sum\limits_{i=1}^{i=k}\left|q_{ji}\right|}\left|q_{ji}\right|. \tag{5}$$

При этом допустимое отклонение i-го параметра определится соотношением

$$\pm\Delta p_i = \frac{\varphi_{ji}}{\left|q_{ji}\right|} = \frac{\Delta\Phi_j}{\sum\limits_{i=1}^{i=k}\left|q_{ji}\right|}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что при таком распределении допустимого отклонения функции величина допустимых отклонений для всех параметров – одна и та же и не зависит от коэффициентов влияния. Очевидно, что такой подход к определению допустимых отклонений параметров приемлем при одинаковых или, по крайней мере, сопоставимых коэффициентах влияния. В соответствии с соотношением (5) при $q_{j1} = q_{j2} = \ldots = q_{jk}$ имеем $\varphi_{j1} = \varphi_{j2} = \ldots = \varphi_{jk}$. Разделим допустимое отклонение j-й функции на число конструктивных параметров k [3]. Тогда

$$\varphi_{ji} = \frac{\Delta\Phi_j}{k},$$

при этом допустимое отклонение параметра

$$\pm\Delta p_i = \frac{\varphi_{ji}}{\left|q_{ji}\right|} = \frac{\Delta\Phi_j}{k\left|q_{ji}\right|}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что допустимые отклонения параметров Δp_i обратно пропорциональны коэффициентам влияния q_{ji}, которые могут отличаться друг от друга в десятки раз, а следовательно, в десятки раз могут отличаться друг от друга и допустимые отклонения параметров, изменяясь от трудоемких в достижении, а иногда и невыполнимых в рассматриваемых условиях, и до весьма широких, превосходящих технологически оправданные. В этом случае технологически и экономически неоправданные допустимые отклонения параметров следует “ужесточить” до разумных значений, оценить их суммарное влияние на отклонение функции, вычесть из допустимого отклонения функции, а оставшуюся часть разделить на число оставшихся параметров.

Допустимое отклонение i-го конструктивного параметра должно удовлетворять неравенству

$$\Delta p_{i\text{нм}} \le \Delta p_i \le \Delta p_{i\text{нб}}\,,$$

где Δp_i – допустимое отклонение i-го параметра, $\Delta p_{i\text{нм}}$ – наиболее жесткое технологически выполнимое допустимое отклонение, $\Delta p_{i\text{нб}}$ – наиболее широкое в пределах разумного допустимое отклонение. Введем величину [4]

$$\theta = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\Delta p_{i\text{нм}}}{\Delta p_i},$$

где k – число конструктивных параметров системы. Величину θ можно определить как показатель “нетехнологичности” системы. Действительно, чем больше значения, которые принимают допуски Δp_i, тем меньше θ (при $\Delta p_i \to \infty$ имеем $\theta \to 0$). Поэтому необходимо найти $\theta_{\min}$ как функцию Δp_i при сохранении линейной взаимосвязи приращений функции и допустимых отклонениях параметров, т. е. необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{i=k}\dfrac{\Delta p_{i\text{нм}}}{\Delta p_i}=\theta_{\min}, \\ (\Delta\Phi_j)^2=\sum\limits_{i=1}^{i=k}\left(\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}\Delta p_i\right)^2. \end{cases} \quad (8)$$

Применив для нахождения условного минимума функции метод Лагранжа, получаем

$$\Delta p_i=\left(\Delta p_{i\text{нм}}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}\right)^{-2}\right)^{1/3}\Delta\Phi_j\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial p_i}\right)^{2/3}\right)^{1/2}. \quad (9)$$

Такой подход к расчету допустимых отклонений конструктивных параметров весьма привлекателен. Однако следует обратить внимание на тот факт, что коэффициент θ может иметь одно и то же значение как при $|\Delta p_i| \geq |\Delta p_{i\text{нм}}|$, так и в том случае, когда отклонения некоторых параметров принимают значения $|\Delta p_i| \leq |\Delta p_{i\text{нм}}|$.

Естественно предположить, что трудоемкость достижения требуемого допустимого отклонения i-го параметра при допустимом отклонении от номинала j-й функции (трудоемкость достижения требуемого отклонения i-го параметра) пропорциональна коэффициенту влияния в некоторой степени n, т. е.

$$T_{ji}=q_{ji}^n. \quad (10)$$

Если при этом допустимое отклонение j-й функции разделить пропорционально трудоемкости достижения допустимого отклонения параметра, то

$$\varphi_{ji}=\left(\Delta\Phi_j\Bigg/\sum_{i=1}^{i=k}T_{ji}\right)T_{ji}, \quad (11)$$

$$\Delta p_i=\frac{\varphi_{ji}}{q_{ji}}=\left(\Delta\Phi_j\Bigg/\sum_{i=1}^{i=k}T_{ji}\right)q_{ji}^{n-1}. \quad (12)$$

Определяя допустимые отклонения параметров при различных значениях степени n, можно достичь оптимального их распределения по критерию минимальной стоимости.

При определении допустимых отклонений параметров можно учесть и знак коэффициентов их влияния на отклонение функции, т. е. учесть возможность взаимной компенсации влияния отклонений параметров [5, 6]. Для этого необходимо предположить возможность упрощенной селективной сборки при селекции параметров только по знаку отклонения, что позволит существенно увеличить допустимые отклонения параметров.

Отклонения параметров и функций от номинальных значений носят случайный характер. При этом каждое из уравнений (4) представляет собой линейную функцию случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия линейной функции случайных величин соответственно равны [7, 8]

$$\begin{aligned} M\{\Delta\Phi_j\} &= q_{j1}M\{\Delta p_1\}+ \\ &+q_{j2}M\{\Delta p_2\}+\ldots+q_{jk}M\{\Delta p_k\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D\{\Delta\Phi_j\} &= q_{j1}^2D\{\Delta p_1\}+ \\ &+q_{j2}^2D\{\Delta p_2\}+\ldots+q_{jk}^2D\{\Delta p_k\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно центральной предельной теореме Ляпунова распределение суммы n независимых случайных величин стремится к нормальному закону при $n \to \infty$, если значения этих величин малы по сравнению с их суммой. При этом на законы распределения случайных величин не накладывается никаких ограничений. Важным практическим следствием теоремы Ляпунова является то, что она оказывается справедливой не только при больших, но и при достаточно малых выборках.

Так как дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, то для количественной характеристики рассеяния удобно использовать среднеквадратическое (стандартное) отклонение случайной величины $\sigma=\sqrt{D\{X\}}$. При этом в рассматриваемом случае

$$\sigma_j^2=\sum_{i=1}^{i=k}\sigma_{ji}^2=\sum_{i=1}^{i=k}q_{ji}^2\sigma_i^2,$$

где

$$\sigma_j=\sqrt{D\{\Delta\Phi_j\}},\ \sigma_{ji}=\sqrt{D\{\varphi_{ji}\}},\ \sigma_i=\sqrt{D\{\Delta p_i\}};$$

$$D\{\varphi_{ji}\}=q_{ji}^2D\{\Delta p_i\},\ \sigma_{ji}=|q_{ji}|\sigma_i.$$

При $q_{j1}^2\sigma_1^2=q_{j2}^2\sigma_2^2=\ldots=q_{jk}^2\sigma_k^2$ имеем $q_{j1}\sigma_1 = q_{j2}\sigma_2=\ldots=q_{jk}\sigma_k=\sigma_j k^{1/2}$.

При статистическом анализе данных часто используются двух- ($\pm2\sigma$) и трехсигмовые ($\pm3\sigma$) пределы отклонения случайной величины от центра распределения μ, вероятности которых соответственно равны

$$P\{-2\sigma<X-\mu<+2\sigma\}=0{,}9545,$$

$$P\{-3\sigma<X-\mu<+3\sigma\}=0{,}9973.$$

Тогда, положив $\Delta\Phi_j=3\sigma_j$, получаем

$$\sigma_i=\Delta\Phi_j\Big/\left(3q_{ji}\sqrt{k}\right). \quad (15)$$

Предположим, что в результате оптимизации отклонений конструктивных параметров при допустимых отклонениях соответствующих функций от их номинальных (расчетных) значений определены допустимые значения отклонений параметров. Из допустимых отклонений одного и того же параметра, полученных из оценки их влияния на различные функции, выбираем минимальное значение. При этом по условию решения задачи определения допустимых отклонений параметров (допусков на конструктивные параметры) имеем $\Delta\Phi_j \neq 0$.

Разработка современных оптических систем, обладающих предельными значениями числовых апертур (относительного отверстия) и линейного или углового поля при весьма высоких требованиях к качеству изображения, представляет собой весьма наукоемкую и трудоемкую задачу. Поэтому вполне естественно желание разработчиков оптических систем и оптических приборов сохранить расчетные характеристики (свойства) оптических систем. Эту задачу удается решить, если в системе находится такой параметр, как, например, воздушный промежуток между линзами, дополнительное изменение которого позволяет компенсировать влияние отклонений других параметров и для рассматриваемой функции получить $\Delta\Phi_j \approx 0$. В объективах микроскопов, планахроматах или планапохроматах, для компенсации влияния допустимых децентрировок поверхностей оптической системы на качество изображения предусматривается возможность дополнительного поперечного смещения толстой отрицательной линзы (мениска), применяемой для компенсации пецвалевой кривизны поверхности изображения. Процедура такой компенсации осуществляется в процессе сборки оптической системы и называется юстировкой.

При всем многообразии оптических систем понятие конструктивного параметра вполне конкретно и очевидно. В результате развития электроники, вычислительной техники и автоматики, широкого применения лазерных источников излучения и в том числе светодиодов, создания новых приемников лучистой энергии и т. д. область применения оптических приборов стала практически неограниченной. Для обоснованного определения понятия функции и ее взаимосвязи с конструктивными параметрами необходимо дальнейшее развитие основ оптотехники конструирования и сборки современных оптических устройств и приборов.

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. *Русинов М.М.* Юстировка оптических приборов. Изд. “Недра”, 1969. 328 с.
2. *Сухопаров С.А., Долинский И.М.* Методика расчета допусков на юстировку оптических систем с помощью передаточных коэффициентов // ОМП. 1967. № 3. С. 1–5.
3. *Сухопаров С.А., Долинский И.М.* Передаточные коэффициенты оптических систем // ОМП. 1967. № 4. С. 10–14.
4. *Грамматин А.П., Кунделева Н.Е.* Распределение допусков на конструктивные элементы оптических систем с учетом технологических границ // ОМП. 1981. № 6. С. 61.
5. *Кулагин В.В.* Основы конструирования оптических приборов: Учебное пособие для приборостроительных вузов. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1982. 312 с.
6. *Латыев С.М.* Конструирование точных (оптических) приборов: Учебное пособие. СПб.: Политехника, 2007. 579 с.
7. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 3. М.: “Советская энциклопедия”, 1982. 1184 с.
8. *Плескунин В.И., Воронина Е.Д.* Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте / Под ред. А.В. Башарина. Л.: Изд-во ЛГУ, 1979. 232 с.