

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА В-СПЛАЙНОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛЬНО-ОПТИЧЕСКОГО X-РАЗВЕТВИТЕЛЯ, ИЗГОТОВЛЕННОГО МЕТОДОМ ДИФФУЗИИ ТИТАНА В ПОДЛОЖКУ ИЗ НИОБАТА ЛИТИЯ

© 2011 г. Г. Б. Дейнека, канд. физ.-мат. наук; В. С. Серебрякова

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: gdeineka@yahoo.com; vlladllena@mail.ru

Приведена универсальная методика расчета параметров канальных оптических волноводов. В качестве алгоритма предложен метод конечных элементов с применением эрмитового набора В-сплайнов. Проведен расчет канального титан-диффузионного оптического волновода на подложке из монокристалла ниобата лития. Представлены результаты численного моделирования распространения излучения предлагаемым методом в разветвителе X-типа, изготовленном по технологии диффузии титана. Показано, что методика В-сплайнов позволяет рассчитывать волноводы с произвольным профилем показателя преломления и различной геометрией построения световодной структуры. Полученные результаты моделирования хорошо согласуются с данными опытного образца X-разветвителя.

Ключевые слова: канальный волновод, X-разветвитель, профиль показателя преломления, диффузия титана, метод конечных элементов, В-сплайны.

Коды OCIS: 230.3120, 230.7020, 230.1360, 160.3130

Поступила в редакцию 30.04.2010

Введение

Расширение элементной базы современной телекоммуникационной техники дало толчок к созданию интегрально-оптических элементов (ИОЭ), как наиболее перспективных устройств для решения широкого круга задач волоконно-оптической связи (мультиплексоры, переключатели, разветвители мощности, модуляторы и др.), а также создания волоконно-оптических датчиков (температуры, тока, давления, вибрации и др.) для измерения, контроля и дистанционного управления различными процессами и объектами. В современных информационно-измерительных комплексах ИОЭ в большинстве случаев представляет собой подложку из электрооптического кристалла и выполненных в ней канальных волноводов, которые могут служить базой для изготовления различных функциональных элементов (поляризаторов, делителей, модуляторов и др.). Особое значение имеет миниатюрность этих элементов, возможность монолитного интегрального исполнения и удобство стыковки с оптическими волокнами.

X-ответвители на подложках из монокристалла ниобата лития (LiNbO_3) являются ключевыми функциональными блоками большинства ИОЭ (переключатели, разветвители мощности, модуляторы и др.). Основным методом при проектировании и изготовлении ИОЭ с заданными свойствами (геометрическая конфигурация, профиль показателя преломления, размер поля моды, потери, коэффициент деления, количество мод, поддерживаемых волноводом и пр.) является экспериментальный подбор технологических параметров.

Проведенный анализ литературы, посвященной методикам расчета волноводов, не дает исчерпывающей информации об оптимизации процесса получения данных о структуре и свойствах волноводов. На сегодняшний день существуют различные методы численного моделирования распространения излучения в канальных волноводах (метод конечных элементов [1–7], метод лучевого распространения [8], метод конечных разностей [9], векторные методы [10] и др. [11, 12]), но каждый из них имеет свои ограничения области применения в зависимости от постановки конкретной задачи. Эти

методы в основном используют практику разбиения пространства неравномерной сеткой с триангулярными элементами [1–3, 9, 10].

Авторами данной работы предлагается метод расчета канальных оптических волноводов, использующий равномерную сетку финитных элементов. В основе физической модели лежит уравнение Гельмгольца, а для вычисления поля в направлении распространения излучения использовано приближение Кранка–Никольсона.

Теоретическое описание

В работе использован эрмитов базис В-сплайнов [13, 14]. Эрмитовый набор функций представляет собой кусочно-гладкие функции, образованные из полиномов третьего порядка. Набор состоит из двух функций f_0 и f_1 , центрированных на каждом узле в одном измерении. Аналитические свойства этих функций представлены в выражениях

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| > 1 \\ (x-1)(x-1)(1+2x), & \text{при } x \geq 0, \\ (1+x)(1+x)(1+2x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| > 1 \\ (1-x)(1-x)x, & \text{при } x \geq 0, \\ (1+x)(1+x)x, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Одним из важнейших свойств этого базиса является возможность применения его для аппроксимации различных функций без решения разного рода матричных задач. Аппроксимационные свойства этих базисных функций исследованы на большом числе одно- и двумерных

задач квантовой механики [14, 15] и показали хорошие результаты как при прямых аппроксимациях, так и при использовании различных вариационных принципов. Особенно эффективно применение базиса В-сплайнов при решении двумерных задач. Обычная практика применения триангулярных квадратичных элементов [1–3, 9, 10] в качестве финитных функций связана с весьма неоднозначным процессом разбиения пространства на треугольные области. Применение в качестве базиса гладких В-сплайнов избавляет от необходимости построения на каждом узле индивидуальной базисной функции и сводится к построению равномерной сетки, в каждом узле которой находится произведение функций типа [15]

$$f_i^{h_1}(x)f_j^{h_2}(y) = \psi_{i,j}^{h_1,h_2} = \psi_\kappa,$$

где κ – обобщенный индекс (h_1, h_2, i, j) .

Общий вид двумерных В-сплайнов приведен на рис. 1. В двумерном случае в одном узле находится четыре сплайна.

Расчет поля в канальном волноводе в сечении, перпендикулярном направлению распространения, в общем случае является двумерной задачей. Рассмотрим световую волну, распространяющуюся по волноводу с произвольным показателем преломления в направлении z (считаем распределение показателя преломления изотропным), а вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости (x, y)

$$E(x, y, z) = E_m(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)],$$

где $k_z = n_{\text{eff}}k_0$ – постоянная распространения, $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число в свободном про-

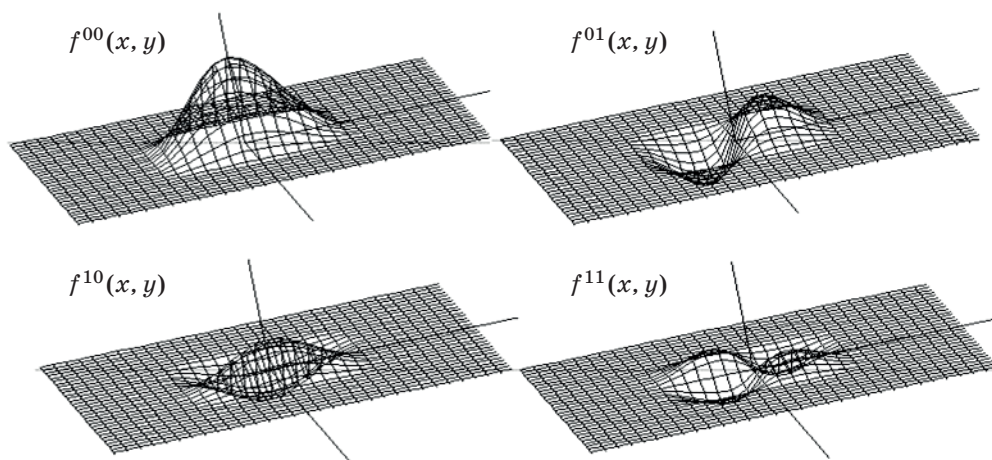


Рис. 1. Набор двумерных В-сплайнов.

странстве. При этом $E_m(x, y)$ является решением уравнения Гельмгольца [16]

$$HE = \gamma E,$$

где $H = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + k_0^2 n^2(x, y)$, $\gamma = k_0^2 n_{\text{eff}}^2$, $n = n(x, y)$ – профиль показателя преломления в плоскости XoY , n_{eff} – эффективный показатель преломления.

Область решения (пространство интегрирования) покрывается сеткой, в узлах которой расположены двумерные сплайны (рис. 1). Таким образом, на каждом узле (i, j) расположены четыре сплайна с индексами (h_1, h_2) .

Представление $E(x, y)$ в виде $E(x, y) = \sum C_k \psi_k(x, y)$ ведет к обобщенной матричной задаче на собственные числа и собственные векторы [15]

$$\sum_{k=0}^M C_k H_{n,k} = \gamma \sum_{k=0}^M S_{n,k} C_n,$$

где

$$H_{n,k} = \int_{x_{\min}, y_{\min}}^{x_{\max}, y_{\max}} \psi_n(x, y) H \psi_k(x, y) dy dx, \quad (1)$$

$$S_{n,k} = \int_{x_{\min}, y_{\min}}^{x_{\max}, y_{\max}} \psi_n(x, y) \psi_k(x, y) dy dx, \quad (2)$$

$[x_{\min} \ x_{\max}] \times [y_{\min} \ y_{\max}]$ – пространство интегрирования, C_k – коэффициенты разложения поля $E(x, y)$, M – число базисных функций ψ_k .

При расчете канальных волноводов одной из важнейших задач является определение модового состава и формы распределения поля в основных модах. Последнее особенно важно для определения потерь при стыковке различных оптических элементов между собой или с оптическими волокнами.

Приведем результаты такого расчета на примере титан-диффузионного канального оптического волновода. Диффузия титана в ниобат лития является на сегодняшний день основной и наиболее отработанной технологией изготовления высококачественных ИОЭ с малыми потерями [1, 2, 5, 7, 12, 17, 18], а волноводы, полученные по данной технологии, имеют согласованную со стандартным одномодовым оптическим волокном числовую апертуру $NA \sim 0,11$ [2, 17, 18].

На оптические свойства канального волновода, изготовленного по технологии диффузии титана, влияют следующие начальные параметры: ширина нанесенной титановой полоски

(W), толщина титановой полоски (H), температура, при которой происходит диффузия (T), время диффузии (t).

Рассмотрим кристалл $Ti:LiNbO_3$ x -среза, но все обозначения будем использовать в переводе на классический вариант системы координат. Пусть свет распространяется вдоль оси z , тогда распределение показателя преломления (плоскость XoY) в области диффузии выражается формулой [1, 2, 5, 7]

$$n_{e,o}^2(x, y, \lambda) = n_{b_{e,o}}^2 + \left[(n_{b_{e,o}} + \Delta n_{s_{e,o}})^2 - n_{b_{e,o}}^2 \right] \times \exp\left(-\frac{y^2}{d_y^2}\right) f\left(\frac{2x}{W}\right),$$

где

$$f\left(\frac{2x}{W}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{W}{2d_x} \left(1 + \frac{2x}{W}\right)\right] + \operatorname{erf}\left[\frac{W}{2d_x} \left(1 - \frac{2x}{W}\right)\right] \right\},$$

$n_{e,o}$ – показатели преломления необыкновенного и обыкновенного лучей, x, y – направления по осям, d_x, d_y – диффузионная ширина и глубина, n_b – показатель преломления подложки, Δn_s – изменение показателя преломления на поверхности.

Зависимость Δn_s от длины волны и толщины титановой пленки [1, 2, 5, 7]

$$\Delta n_{s_{e,o}}(\lambda) = \left[B_{0_{e,o}}(\lambda) + B_{1_{e,o}}(\lambda) \frac{H}{d_{y_{e,o}}} \right] \left(\frac{H}{d_{y_{e,o}}} \right)^{\alpha_{e,o}},$$

где $B(\lambda)$ – дисперсионные коэффициенты, α – соответствующие коэффициенты для обыкновенного и необыкновенного лучей.

$$B_{0_e}(\lambda) = 0,385 - 0,430\lambda + 0,171\lambda^2,$$

$$B_{1_e} = 9,130 + 3,850\lambda - 2,490\lambda^2,$$

$$B_{0_o}(\lambda) = 0,0653 - 0,0315\lambda + 0,0071\lambda^2,$$

$$B_{1_o}(\lambda) = 0,4780 + 0,4640\lambda - 0,3480\lambda^2,$$

$$\alpha_e = 0,83, \alpha_o = 0,53, 0,6 \leq \lambda(\text{мкм}) \leq 1,6.$$

Диффузионные коэффициенты D_x и D_y , диффузионные ширина и глубина d_x и d_y для обыкновенного и необыкновенного лучей, а также глубина изменения профилей показателя преломления $d_{y_{e,o}}$ выражаются следующими формулами [1, 2, 5, 7]: $D_i = D_{i0} \exp[-E_{i0}/(KT)]$, $d_i = 2\sqrt{D_i t}$, $d_{y_{e,o}} = d_y / \sqrt{\alpha_{e,o}}$, $i = x, y$, где D_{i0} – диффузионные константы, E_{i0} – энергия актива-

Константы соединения LiNbO_3 , использованные в расчетах

Постоянная	Значение
D_{x0} , мкм ² /ч	5×10^9
D_{y0} , мкм ² /ч	$1,35 \times 10^8$
E_{x0} , эВ	2,60
E_{y0} , эВ	2,22

ции, K – постоянная Больцмана. Эти величины приведены в таблице [1].

Показатели преломления подложки n_b в зависимости от длины волны (мкм) для обыкновенного и необыкновенного лучей могут быть вычислены как [1, 2]

$$n_{b_o}^2 = 4,9048 - \frac{0,11768}{0,04750 - \lambda^2} - 0,027169\lambda^2,$$

$$n_{b_e}^2 = 4,5820 - \frac{0,099169}{0,044432 - \lambda^2} - 0,021950\lambda^2.$$

Примем следующие параметры диффузии (типичные для этой технологии): $W = 7$ мкм, $H = 1000 \text{ \AA}$, $T = 1050 \text{ }^\circ\text{C}$, $t = 8,5$ ч. Длину волны выберем $1,55$ мкм. Тогда $d_y = 4,00$ мкм, $d_x = 4,60$ мкм, $d_{y,o} = 6,23$ мкм, $d_{y,e} = 4,98$ мкм, $n_{b_o} = 2,2125$, $n_{b_e} = 2,1383$, $\Delta n_{s_o} = 0,00446$, $\Delta n_{s_e} = 0,01217$.

Результаты расчета методом В-сплайнов показали, что волновод, с указанными выше па-

раметрами, поддерживает распространение одной моды, т. е. является одномодовым, что соответствует волноводной теории для световода с указанными параметрами. Вид профиля показателя преломления (а) и распределение поля основной моды (б) приведены на рис. 2 (в условных единицах).

Выше было отмечено, что основная задача авторов состояла в численном моделировании распространения электромагнитного излучения в канальных волноводах различной геометрической конфигурации. Для расчета таких систем недостаточно знать распределение поля в сечении, поэтому необходимо проводить пересчет поля от слоя к слою при переносе энергии лазерного излучения вдоль направления распространения. Таким образом, задача становится трехмерной.

В гармоническом приближении по частоте $\exp(i\omega t)$ рассмотрим уравнение Гельмгольца для вектора \mathbf{E} световой волны [16, 19]

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(x, y, z) \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

где ω – угловая частота, c – скорость света в вакууме.

Для отдельных векторных компонент поля имеем скалярное уравнение

$$\nabla^2 E + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(x, y, z) E = 0,$$

где E одна из шести компонент электрического и магнитного полей. Профиль показателя пре-

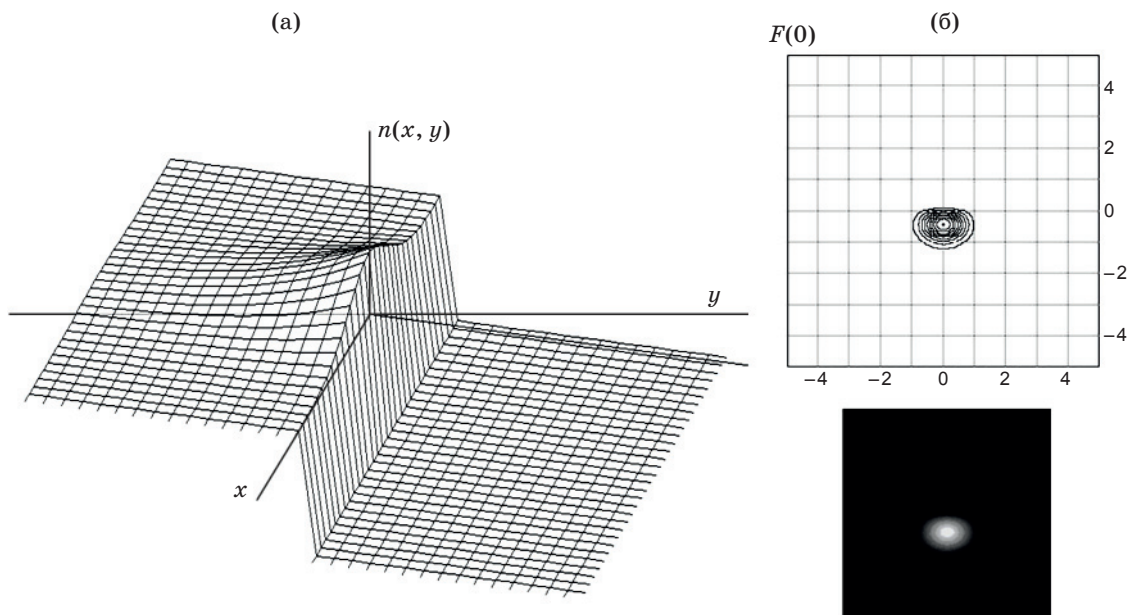


Рис. 2. Результаты моделирования для канального титан-диффузионного волновода на ниобате лития.

ломления $n(x, y, z)$ вдоль оси z определяется геометрией волноводных каналов. При распространении волны в направлении z и медленно меняющемся в этом направлении показателе преломления поле $E(x, y, z)$ можно представить как произведение медленно меняющейся функции $u(x, y, z)$ на быстро осциллирующий множитель $\exp(iKz)$

$$E(x, y, z) = u(x, y, z) \exp(iKz),$$

где $K = k_0 n_b$ – значение волнового вектора в направлении распространения z , k_0 – волновое число, n_b – показатель преломления подложки.

Тогда уравнение Гельмгольца (3) можно представить в виде

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} u + 2iK \frac{\partial}{\partial z} u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + (k^2(x, y, z) - K^2) u,$$

где $k(x, y, z) = k_0 n(x, y, z)$.

При медленно меняющемся в направлении распространения z показателе преломления $n(x, y, z)$, т. е. при выполнении условия (что хорошо выполняется для реальных волноводных систем) [19]

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} u \right| \ll \left| 2iK \frac{\partial}{\partial z} u \right|$$

приходим к уравнению

$$2iK \frac{\partial}{\partial z} u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + (k^2(x, y, z) - K^2) u, \quad (4)$$

аналогичному временному уравнению Шредингера в квантовой механике. Для решения этого уравнения после приведения его к матричному виду с помощью разложения $u(x, y, z) = \sum C_k(z) \psi_k(x, y)$ использовано приближение Кранка–Никольсона [20, 21].

Уравнение (4) решается в два этапа:

1. Строится исходное распределение поля $u(x, y, z_0)$ для сечения в плоскости z_0 как собственная функция уравнения (т. е. выбирается определенная мода)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y, z_0) + k^2(x, y, z_0) u(x, y, z_0) = \gamma u(x, y, z_0), \quad (5)$$

которое решается методом, описанным для двумерного случая распределения показателя преломления.

2. С помощью процедуры Кранка–Никольсона проводится пересчет поля от слоя z к слою

$z + \Delta z$ в направлении распространения z [15] в соответствии с матричным уравнением

$$\left(KS + i \frac{\Delta z}{2} h \right) C(z + \Delta z) = \left(KS - i \frac{\Delta z}{2} h \right) C(z),$$

где $h_{i,j} = |(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) + (k^2(x, y, z) - K^2)|_{i,j}$, – матрица оператора, построенная на сплайнах, а S – матрица интегралов перекрытия, аналогичных (1) и (2).

Результаты моделирования

В качестве примера для апробации предлагаемой методики расчета был выбран опытный образец X-разветвителя, полученный по технологии диффузии титана в подложку ниобата лития х-среза, эскиз которого представлен на рис. 3. Данный опытный образец был изготовлен И.В. Ильичевым, А.В. Шамраем и П.В. Гаенко в лаборатории квантовой электроники Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН и любезно предоставлен ими для работы.

Свет вводится в один из каналов и в области связи расщепляется на два потока. Одной из важнейших характеристик любого разветвителя является коэффициент деления мощности излучения, который обычно подбирается экспериментально. Предлагаемая методика расчета разветвителей позволяет определить количественные характеристики на этапе проектирования.

X-разветвитель, выполненный в соответствии с техническими условиями ВДАМ.203728.001ТУ с параметрами диффузии, описанными выше, в эксперименте демонстрировал коэффициент деления 0,48:0,52. Схема центральной части такого разветвителя приведена на рис. 3, ее размер соответствует пространству интегрирования матричных элементов $[x_{\min} x_{\max}] \times [y_{\min} y_{\max}]$.

На кристалл в соответствии со схемой нанесены полоски титана толщиной $H = 0,1$ мкм, начальная ширина каждой титановой полоски $W = 8$ мкм, температура и время диффузии $T = 1050$ °С, $t = 8,5$ ч, а максимальное превышение показателя преломления диффузионного канала над показателем преломления подложки составляет $\Delta n \approx 0,02$.

Распределение показателя преломления (на рис. 3 схематично в относительных единицах показано через 1000 мкм) принято в соответствии с экспериментально полученными формулами для диффузии титана в ниобате лития

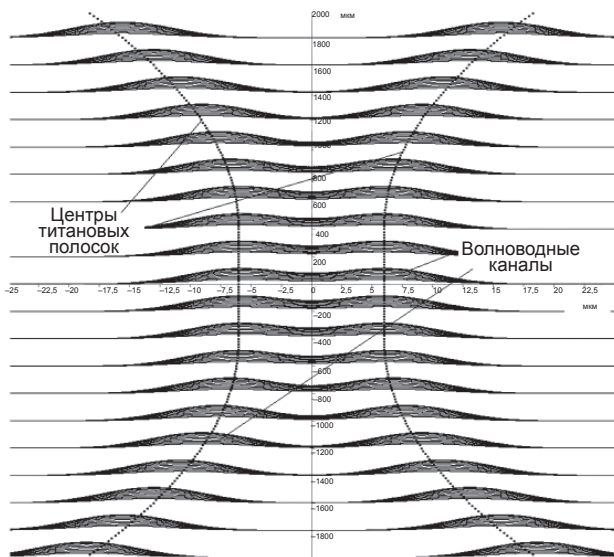


Рис. 3. Схема центральной части Ti:LiNbO_3 X-разветвителя (размеры указаны в мкм).

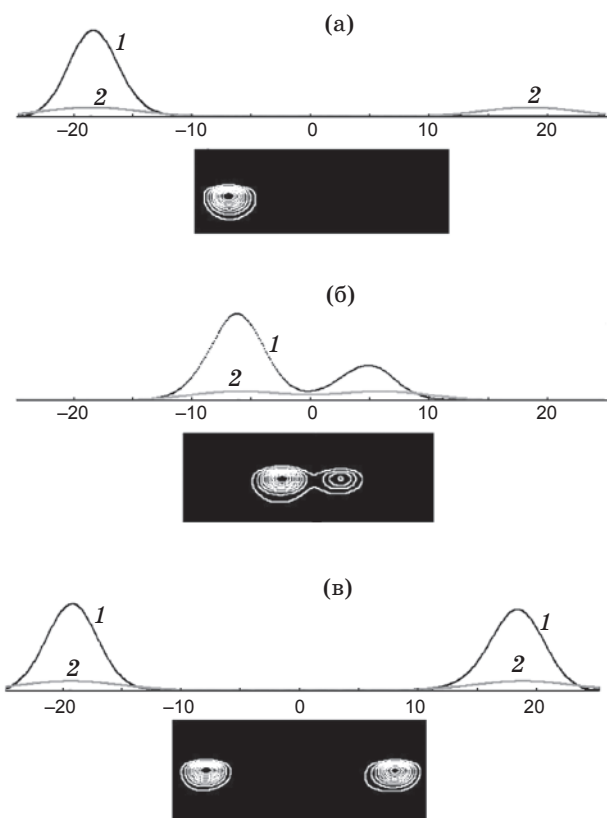


Рис. 4. а – распределение интенсивности поля (1) начальное в относительных единицах при $z_0 = -2000$ мкм, двумерное распределение (размер поля моды) дано в другом масштабе, б – распределение поля в центре разветвителя при $z = 0$ мкм, в – окончательное распределение поля при $z = 2000$ мкм. 2 – превышение показателя преломления в волноводных каналах над показателем преломления в подложке.

x-среза, которые взяты из работ [1, 2, 5, 7, 18] и рассмотрены в начале раздела теоретического описания.

В качестве исходного распределения поля выбирается основная мода одного канала (в данном случае левого), вычисленная как решение уравнения (5). На рис. 4а показано начальное одномерное распределение поля вдоль оси x на глубине 0,1 мкм от поверхности кристалла и двумерное распределение интенсивности в сечении $z_0 = -2000$ мкм в относительных единицах. Кроме того, схематично обозначены волноводные каналы с превышением показателя преломления над показателем преломления подложки.

На рис. 4б представлено распределение поля в середине разветвителя при значении $z = 0$, где расстояние между плечами минимально (4 мкм), и видно перетекание поля в правый канал и распределение плотности по плечам разветвителя. Соотношение интенсивностей в правом и левом каналах составляет 0,63: 0,37.

На рис. 4в показано окончательное распределение поля между левым и правым плечами разветвителя 0,47: 0,53, что соответствует техническим характеристикам рассматриваемого опытного образца 0,48: 0,52.

Заклучение

Предложен метод расчета канальных волноводов на равномерной сетке с использованием эрмитового набора В-сплайнов. Сравнение этого метода с известными расчетами стандартных распределений показателя преломления показало, что В-сплайны и равномерная сетка позволяют избавиться от неоднозначных методов, применяемых при построении треугольных сеток.

Метод распространен на трехмерный случай. Представленные результаты расчета Ti:LiNbO_3 X-разветвителя показали хорошее соответствие измеренным параметрам экспериментального образца разветвителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Franco M. A. R., Passaro A., Neto F.S. Modal Analysis of Anisotropic Diffused-Channel Waveguide by a Scalar Finite Element Method // IEEE Transactions on Magnetics. 1998. V. 34. № 5. P. 2783–2786.
2. Franco M. A. R., Vasconcellos L.C., Machado J.M. Coupling efficiency between optical fiber and Ti:LiNbO_3 channel waveguide // Telecommunications. 2004. V. 07. № 01. P. 54–59.

3. *Koshiba M., Saitoh H., Eguchi M., Hirayama K.* Simple scalar finite element approach to optical rib waveguide // *IEEE Proc.-J.* 1992. V. 139. № 2. P. 166–171.
4. *Rahman B.M.A., Davies J.B.* Finite-Element Solution of Integrated Optical Waveguides // *J. of light-wave technology.* 1984. V. LT-2. № 5. P. 682–687.
5. *Fouchet S., Carencio A., Daguet C.* Wavelength dispersion of Ti induced refractive index change in LiNbO_3 as a function of diffusion parameters // *J. of Lightwave Technology.* 1987. V. LT-5. № 5. P. 700–707.
6. *Mabaya N., Lagasse P.E., Vandenbulcke P.* Finite element analysis of optical waveguide // *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques.* 1981. V. MTT-29. № 6. P. 600–605.
7. *Popescu V.A.* Determination of propagation constants in a TiLiNbO_3 optical waveguide by using finite element and variational methods // *Opt. Com.* 2005. V. 250. P. 274–279.
8. *Wachter C., Palme M., Schreiber P.* Applications of standard BPM algorithms // *Proc. SPIE.* 1997. V. 2997. P. 220–231.
9. *Stern M.S.* Semivectorial polarized finite difference method for optical waveguide with arbitrary index profile // *IEEE Proc.-J, Optoelectron.* 1988. V. 135. P. 56–63.
10. *Rahman B.M.A., Davies J.B.* Vector-H finite element solution of GaAs/GaAlAs rib waveguide // *IEEE Proc.-J, Optoelectron.* 1985. V. 132. P. 349–353.
11. *Zh. Cao, Li Zhan, Y. Chen.* Improved WKB method // *Proc. SPIE.* 1996. V. 2891. P. 289–295.
12. *Chakraborty R., Biswas J.C., Lahiri S.K.* Analysis of directional coupler electro-optic switches using effective-index-based matrix method // *Opt. Com.* 2003. V. 219. P. 157–163.
13. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 254 с.
14. *Дейнека Г.Б.* Применение эрмитового базиса В-сплайнов для решения двухатомных молекулярных задач методом Хартри–Фока–Дирака // *Опт. и спектр.* 1998. Т. 84. № 2. С. 198–203.
15. *Deineka G.B.* 2D model of H^+ and $\text{H}(1s)$ collision: application to charge transfer // *International Journal of Quantum Chemistry.* 2006. V. 106. № 10. P. 2262–2267.
16. *Тамир Т.* Волноводная оптоэлектроника. М.: Мир, 1999. 574 с.
17. *Lefèvre H.* The Fiber–Optic Gyros. Artech House, 1993. 313 p.
18. *Серебрякова В.С.* Оптимизация параметров изготовления интегрально-оптических элементов для волоконно-оптических гироскопов // *Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО.* 2008. В. 49. СПб.: СПбГУ ИТМО. С. 42–53.
19. *Lifante Gin'es.* Integrated photonics: Fundamentals. Wiley&Sons Ltd, 2003. 198 p.
20. *Bonche P., Koonin S., Negele J. W.* One-dimensional nuclear dynamics in the TDHF approximation // *Phys. Rev.* 1976. V. 13. P. 1226–1258.
21. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical Recipes in Fortran77: The Art of Scientific Computing. N.-Y.: Cambridge University Press, 1996. 277 p.