УДК 621.397.274; 621.391.1: 519.27

ПУАССОНОВСКАЯ МОДЕЛЬ ЗВЕЗДНОГО НЕБА И ЗАДАЧА ОБНАРУЖЕНИЯ ЗВЕЗД ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫМ ПРИБОРОМ

© 2011 г. **В. И. Федосеев**, доктор техн. наук

Научно-производственное предприятие “Геофизика-Космос”, Москва

E-mail: coop@geofizika-cosmos.ru

Рассматриваются достоинства и недостатки использования пуассоновской модели звездного неба на примере задачи обнаружения звезд оптико-электронным прибором.

Ключевые слова: *звездное небо, пуассоновская модель, обнаружение звезд.*

Коды OCIS: 070.4560; 070.6110; 200.3050

Поступила в редакцию 23.06.2010

В современной оптической технике имеется класс аппаратуры, объектом наблюдения которой является звездное небо – отдельные звезды или группы звезд. При проектировании такой аппаратуры и исследовании ее характеристик возникает необходимость в представлении звездного неба в виде математической модели. Довольно часто в качестве такой модели используется пуассоновская модель [1, 2]. Согласно этой модели звездное небо представляется случайным полем точек-звезд, распределение которых по небесной сфере описывается законом Пуассона. Практика показывает, что такая модель может служить простым и удобным инструментом для выявления зависимостей и тенденций на качественном уровне и приближенных оценок; для точных количественных оценок она является слишком грубой. В настоящей работе на примере решения одной частной задачи обнаружения звезд оптико-электронным прибором демонстрируются достоинства и недостатки пуассоновской модели звездного неба.

Рассматривается следующая задача обнаружения. Оптико-электронным прибором проводится наблюдение участка звездного неба. Характеристика обнаружения прибора – зависимость вероятности обнаружения звезды от ее величины $P_{\text{обн}}(m)$ – имеет вид, представленный на рис. 1. Для ярких звезд $m \le m_1$ вероятность $P_{\text{обн}}(m)$ близка к 1, для слабых звезд $m \ge m_0$ вероятность $P_{\text{обн}}$ близка к 0, в зоне же $m_1 > m > m_0$ вероятность $P_{\text{обн}}(m)$ существенно отличается как от 1, так и от 0. Эту зону назовем зоной неуверенного обнаружения. Особенность рассматриваемой задачи в том, что протяженность этой зоны значительна и может составлять 1–2 зв. вел. Такая ситуация имеет место, например, в приборах ориентации космических аппаратов по звездам, где размер этой зоны складывается из ряда составляющих погрешностей энергетических измерений приборов, нестабильности их параметров в условиях эксплуатации, точности знания величин рабочих звезд и др. Прибор должен обнаружить определенное число рабочих звезд, необходимое для решения той или иной задачи (распознавание группы звезд – 3–4 звезды, определение углов трехосной ориентации – не менее 2-х звезд, углов двухосной ориентации – не менее одной звезды и др.). Необходимо определить вероятность обнаружения прибором требуемого количества звезд с учетом вышеуказанной особенности его характеристики обнаружения и того факта, что ориентация прибора относительно звездного неба заранее неизвестна.

Рассмотрение начнем в рамках пуассоновской модели звездного неба. Интенсивность

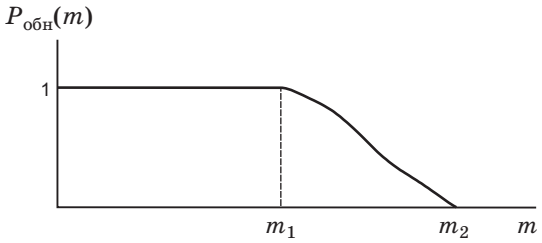

Рис. 1. Типичный вид характеристики обнаружения звезд оптико-электронным прибором.

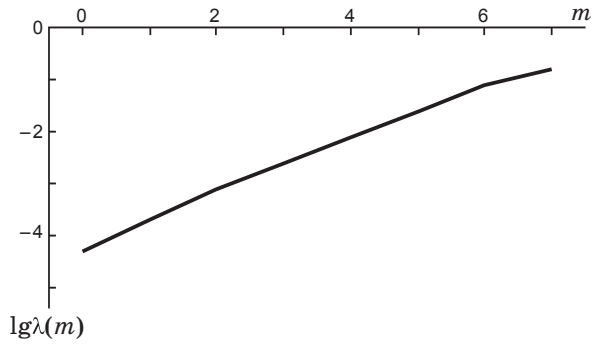

Рис. 2. Зависимость среднего числа звезд в 1 кв. град небесной сферы от звездной величины.

наблюдаемого случайного поля в этой модели $\lambda(m)$ представляет собой среднее число звезд в 1 кв. град небесной сферы, имеющих звездную величину от m до $m + 1$ (усреднение проводится по всей небесной сфере). На рис. 2 представлена зависимость $\lambda(m)$, заимствованная из работы [1]. Обозначим телесный угол поля зрения прибора через Ω и выберем малый интервал звездных величин Δm таким, чтобы во всем интересующем нас диапазоне звезд вероятность $P_{\text{поп}}(m)$ попадания в поле зрения Ω звезды из диапазона m, $m + \Delta m$ была мала, т. е.

$$P_{\text{поп}}(m) = \lambda(m)\Delta m\Omega \ll 1. \qquad (1)$$

Тогда вероятностью попадания в поле зрения двух звезд и более из этого малого диапазона можно пренебречь, а факт выдачи прибором информации о звезде из этого диапазона является совпадением двух событий – наличия такой звезды в поле зрения и обнаружения этой звезды прибором. Поэтому вероятность выдачи информации прибором по этой звезде равна

$$P(m) = P_{\text{обн}}(m)P_{\text{поп}}(m), \qquad (2)$$

где $P_{\text{обн}}(m)$ – характеристика обнаружения прибора, о которой говорилось выше.

Разобьем весь диапазон звездных величин, для которых $P_{\text{обн}}(m) > 0$, точками m_i, где $i = 1, 2,..., k$, на интервалы длиной $\Delta m = m_{i+1} - m_i$. Тогда полная вероятность выдачи прибором информации по крайней мере по одной из звезд этого диапазона определяется выражением

$$P_1 = 1 - \prod_{i=1}^{k}\left[1 - P(m_i)\right] = \\ = 1 - \exp\left[\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1 - P(m_i)\right)\right]. \qquad (3)$$

Учитывая, что $P(m_i) \ll 1$, можно положить $\ln(1 - P(m_i)) = -P(m_i)$. Тогда из формул (1), (2), (3) будем иметь

$$P_1 = 1 - \exp\left[-\Omega\sum_{i=1}^{k}P_{\text{обн}}(m_i)\lambda(m_i)\Delta m_i\right].$$

Устремляя $\Delta m_i \to 0$, получим

$$P_1 = 1 - \exp\left[-\Omega\int_M P_{\text{обн}}(m)\lambda(m)dm\right], \qquad (4)$$

где M – диапазон звездных величин, в котором $P_{\text{обн}}(m) > 0$.

Интегралу, стоящему в показателе экспоненты выражения (4), можно дать наглядную физическую интерпретацию. Если через Ω_0 обозначить телесный угол, соответствующий полной сфере, и положить $P_{\text{обн}}(m) = 1$ всюду в M, то величина

$$\Omega_0\int_M P_{\text{обн}}(m)\lambda(m)dm = \Omega_0\int_M \lambda(m)dm = N$$

будет полным количеством звезд в рабочем диапазоне звездных величин прибора M. Если же $P_{\text{обн}}(m) \le 1$ в M, то величину $\Omega_0\int P_{\text{обн}}(m)\lambda(m)dm$ можно назвать эффективным количеством звезд для прибора с характеристикой обнаружения $P_{\text{обн}}(m)$ и обозначить $N_{\text{эфф}}$, где

$$N_{\text{эфф}} = \Omega_0\int_M P_{\text{обн}}(m)\lambda(m)dm. \qquad (5)$$

$N_{\text{эфф}}$ равно числу звезд, обнаруживаемых прибором, который имеет “прямоугольную” характеристику обнаружения: $P_{\text{обн}}(m) = 1$, $m \le m_{\text{эфф}}$ и $P_{\text{обн}}(m) = 0$, $m > m_{\text{эфф}}$ (здесь $m_{\text{эфф}}$ имеет такое значение, при котором число звезд с $m \le m_{\text{эфф}}$ равно $N_{\text{эфф}}$).

При “прямоугольной” характеристике обнаружения количество рабочих звезд, которое должно закладываться в приборный каталог, точно равно $N_{\text{эфф}}$. Если характеристика обнаружения отличается от “прямоугольной” (как всегда бывает на практике), то для наиболее полного использования обнаружительных возможностей прибора число звезд в приборном каталоге должно быть увеличено по сравнению с $N_{\text{эфф}}$ так, чтобы все звезды , соответствующие зоне неуверенного обнаружения, вошли в этот каталог.

С учетом сказанного, выражение для вероятности выдачи информации прибором хотя бы по одной звезде может быть записано в виде

$$P_1 = 1 - \exp\left(-\frac{\Omega}{\Omega_0} N_{\text{эфф}}\right). \quad (6)$$

Отсюда можно получить соотношение для выбора телесного угла поля зрения или количества рабочих звезд

$$\Omega N_{\text{эфф}} = \Omega_0 \ln(1 - P_1)^{-1}. \quad (7)$$

Аналогично можно получить выражение для вероятности выдачи информации по не менее, чем двум звездам

$$P_2 = 1 - \prod_{i=1}^{k}[1 - P(m_i)] - \\ - \sum_{l=1}^{k} P(m_l) \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - P(m_i)}{1 - P(m_l)}.$$

Выполняя преобразования, аналогичные предыдущему случаю, и учитывая, что $1 - P(m_i) \approx \approx 1$, можно получить следующее соотношение:

$$P_2 = 1 - \left(1 + \frac{\Omega}{\Omega_0} N_{\text{эфф}}\right) \exp\left(-\frac{\Omega}{\Omega_0} N_{\text{эфф}}\right). \quad (8)$$

Из выражений (6), (8) видно, что вероятности P_1, P_2 соответствуют пуассоновскому распределению с параметром $\Lambda = (\Omega/\Omega_0)N_{\text{эфф}}$. Если же исходить из традиционного подхода к выбору рабочих звезд, то в качестве параметра пуассоновского распределения следует брать $\Lambda = (\Omega/\Omega_0)N_1$, где N_1 – число звезд, соответствующее зоне уверенного обнаружения $m \le m_1$, $N_1 < N_{\text{эфф}}$. Таким образом при изложенном подходе за счет использования зоны неуверенного обнаружения возможно увеличение числа рабочих звезд прибора с N_1 до $N_{\text{эфф}}$ с соответствующим увеличением вероятности выдачи информации прибором. Для реализации такого режима работы в приборный каталог в качестве рабочих должны быть включены звезды с $m \le m_0$, количество которых $N_0 > N_{\text{эфф}} > N_1$. При этом работа по каждой конкретной звезде из зоны неуверенного обнаружения будет выполняться не регулярно, но за счет большого количества таких звезд вероятность выдачи информации прибором повысится без изменения его конструктивных параметров.

В общем случае для вероятности выдачи информации P_n по не менее, чем n звездам можно пользоваться соотношением

$$P_n = 1 - \Psi(n - 1, \Lambda), \quad (9)$$

где $\Psi(n - 1, \Lambda)$ – функция распределения вероятностей Пуассона с параметром $\Lambda = (\Omega/\Omega_0)N_{\text{эфф}}$. Функция распределения вероятностей Пуассона табулирована (см., например [3]).

Для реальной аппаратуры характеристика обнаружения $P_{\text{обн}}(m)$ отличается от прямоугольной, причем форма ее в зоне неуверенного обнаружения трудно прогнозируема. Поэтому вычисление $N_{\text{эфф}}$ по формуле (5) практически затруднительно, также как и определение соответствующей этому $N_{\text{эфф}}$ предельной звездной величины $m_{\text{эфф}}$. Поэтому в качестве $N_{\text{эфф}}$ может быть принято то количество звезд, в котором для самой слабой звезды $P_{\text{обн}}(m_{\text{эфф}}) = 0{,}5$. Пояснить это можно следующим рассуждением. При замене реальной характеристики обнаружения на “прямоугольную” с выбранным указанным способом $m_{\text{эфф}}$ отбрасываются звезды, обнаруживаемые с вероятностью менее 0,5. Звезды же, которые реально обнаруживаются с вероятностью более 0,5, но меньше 1, считаются обнаруживаемыми с вероятностью 1. Так как характер зависимости $\lambda(m)$ экспоненциально возрастающий, то отбрасываемых звезд оказывается больше, чем звезд, у которых вероятность обнаружения завышается. Поэтому определенное таким образом $N_{\text{эфф}}$ будет несколько меньше, чем в реальной аппаратуре. Другими словами, если за $N_{\text{эфф}}$ принимать количество звезд, выбираемое из условия $P_{\text{обн}}(m_{\text{эфф}}) = 0{,}5$, то фактическая вероятность выдачи информации прибором будет несколько больше, чем определяемая по формулам (6), (8), (9).

Изложенный качественный подход подтверждается результатами расчета вероятностей выдачи прибором информации, выполненного по формуле (6) для трех видов характеристик обнаружения, приведенных на рис. 3, и $\Omega = 320$ кв. град, $m_1 = 3$, $m_0 = 4$, $m_{\text{эфф}} = 3{,}5$ (в фотометрической системе прибора). Результаты расчета представлены в таблице.

Из данных расчета (второй столбец таблицы) видно, что, во-первых, для различных видов характеристики обнаружения с одним и тем же $m_{\text{эфф}}$ вероятности выдачи информации прибором отличаются мало, и, во-вторых, минимальное значение этой вероятности имеет место для прямоугольной характеристики обнаружения.

Для проверки степени приближения результатов, полученных при использовании пуассоновской модели звездного неба, к реальности было проведено математическое моделирование методом статистических испытаний по реальному расположению звезд на небесной сфере. Полученные при этом значения вероятно-

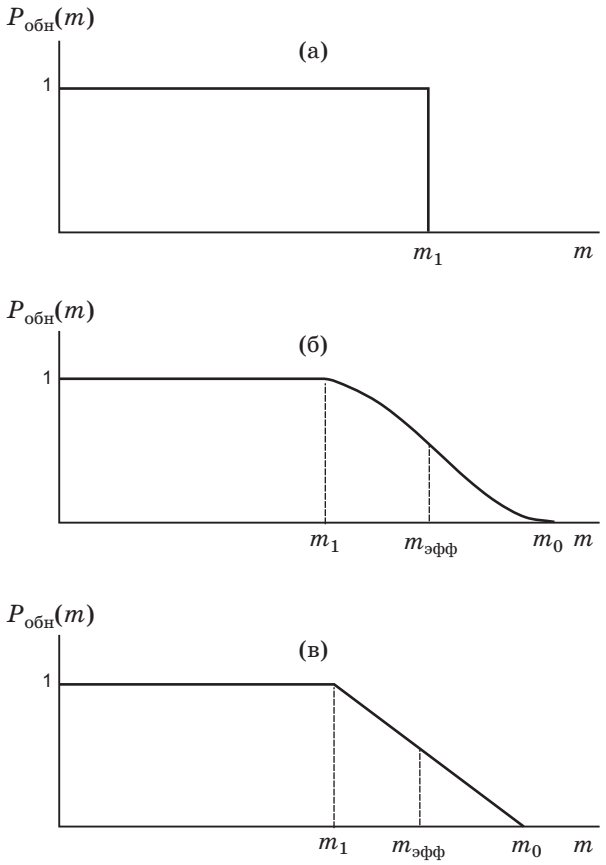

Рис. 3. Три вида характеристик обнаружения оптико-электронного прибора. а – прямоугольная, б – со спадом вида $\sin^2\frac{\pi}{2}(m-m_0)$, в – с линейным спадом.

Вероятности выдачи информации по звезде

Вид характеристики обнаружения	Вероятности, вычисленные по формуле (6)	Вероятности, полученные при моделировании
1	0,91	0,746
2	0,92	0,760
3	0,93	0,789

стей приведены в третьем столбце таблицы. Эти значения меньше, чем рассчитанные исходя из пуассоновской модели, но в то же время соотношения между вероятностями для различных видов характеристик обнаружения в целом соответствуют реальности. Причина такого различия состоит в том, что плотность звезд в области галактического экватора значительно выше, чем у галактических полюсов. Учесть это можно было бы введением переменного параметра пуассоновского распределения. Но такая модификация лишила бы использование пуассоновской модели одного из достоинств – простоты. Поэтому необходимо иметь в виду, что простая пуассоновская модель дает оптимистические результаты и может использоваться только для ориентировочных оценочных расчетов. Для более точного определения характеристик приборов необходимо использовать статистическое моделирование с учетом реального расположения звезд на небе.

Из проведенного анализа можно сделать следующие выводы.

• Пуассоновская модель звездного неба является простым и наглядным средством для ориентировочной оценки характеристик оптико-электронных приборов при их работе по звездам (например, вероятностей выдачи информации прибором, формулы (6), (8), (9)).

• С помощью пуассоновской модели звездного неба продемонстрированы два интересных факта

– за счет использования зоны неуверенного обнаружения в характеристике обнаружения прибора возможно увеличение количества его рабочих звезд и вероятности выдачи им информации,

– для нахождения расчетных оценок вероятности выдачи информации прибором не требуется точного знания его характеристики обнаружения, достаточно знать величину звезды $m_{эфф}$, для которой вероятность обнаружения равна 0,5.

• Пуассоновская модель звездного неба дает оптимистические оценки вероятностей выдачи информации оптико-электронным прибором, поэтому может использоваться только для ориентировочных расчетов. Для получения более точных количественных значений параметров приборов необходимо использовать статистическое моделирование с учетом реального распределения звезд на небесной сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астроследящие системы // Под ред. Чемоданова Б.К. М.: Машиностроение, 1980. 304 с.

2. *Bezooijen R.W.H.* Autonomous star referenced attitude determination // Guidance and control. 1989. AAS 89-003. P. 31–52.

3. *Оуэн Д.Б.* Сборник статистических таблиц. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 586 с.