

## РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ С ИСКЛЮЧЕНИЯМИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ-ГОЛОГРАФИИ

© 2008 г. А. М. Алексеев; А. В. Павлов, канд. техн. наук

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий,  
механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: pavlov@phoi.ifmo.ru

В развитие ранее предложенного биологически мотивированного подхода к реализации логико-лингвистического моделирования методом фурье-голографии показана возможность реализации логики с исключениями как частного случая немонотонной логики. Предложено использовать один оператор импликации как для посылки, так и для исключения, строя лингвистические шкалы для посылки и исключения с взаимно обратными зависимостями значения логического заключения от значения входной переменной. Приведены результаты численного моделирования примера формирования логического вывода.

Коды OCIS: 090.0090, 3000.34700.

*Поступила в редакцию 25.10.2007.*

### Введение

Искусственный интеллект (ИИ) является одной из перспективных областей применения оптической голографии в силу наличия ряда глубоких аналогий между свойствами человеческого интеллекта и оптической голографии [1–3]. Значительная часть работ в этом направлении посвящена реализации модели ассоциативной памяти. Память является фундаментом интеллекта, но сама по себе еще не интеллект, поскольку основная функция интеллекта – решение задач посредством рассуждений, т. е. построение цепочек взаимосвязанных логических заключений.

Рассуждения основываются на знаниях об окружающем мире, которые хранятся в памяти системы. Применительно к системам ИИ согласно [4] принято выделять три уровня абстракции формального описания системы, основанной на знаниях:

- 1) знания,
- 2) логика – знания, представленные в виде формул логической системы;
- 3) реализация (представление формул в структурах базы знаний).

В данной статье рассмотрение проведено применительно к уровню логики. Под термином логика будем понимать алгебру логики.

Наиболее адекватной особенностям человеческого мышления математической формализацией логики большинство исследователей сегодня признают нечеткие логики, использующие математический аппарат теории нечетких множеств, и осно-

ванный на них метод логико-лингвистического моделирования (ЛЛИМ) [5]. ЛЛИМ позволяет передать системе ИИ (обучить систему) знания, накопленные человеком, а также сформированную им логику на естественно-подобном (для человека) языке с использованием присущей человеку неопределенности высказываний и расплывчатости формулировок. В рамках этого подхода значение каждой лингвистической переменной представляется нечетким подмножеством (как правило, нечетким числом (НЧ)), определяемым как унимодальное, нормальное и выпуклое подмножество числовой оси. Смысл всего высказывания вычисляется по правилам арифметики НЧ.

Реализация ЛЛИМ методом фурье-голографии (ФГ) была обоснована теоретически и подтверждена экспериментально в работах [6–8], в которых показано, что схема ФГ строит алгебру, в которой фурье-дуальность определяющих операций (абстрактных сложения и умножения или, в терминах логики, дизъюнкции и конъюнкции) порождает нечеткость как свойство модели. Поскольку дуальность определяющих операций реализуется оператором фурье-преобразования, то нечеткость как свойство модели имеет своим физическим основанием фундаментальное явление дифракции. Логика, реализованная в [6–8], относится к классу общезначимых, или монотонных, логик, в которых добавление новых знаний не изменяет истинности логического вывода.

Вместе с тем реальная обстановка, в которой необходимо принимать решения, характеризуется

неполнотой и ненадежностью исходной информации. В процессе функционирования система ИИ должна адаптироваться к изменяющейся обстановке, т. е. пополнять свои знания об окружающем мире, самообучаться. Поэтому закономерен интерес к немонокотным логикам (НМЛ), в которых добавление новой информации может изменять истинность ранее сформированного вывода [4, 9–14]. НМЛ более адекватны реальной обстановке, в которой приходится принимать решения, и существенно повышают гибкость логического вывода в условиях неполноты знаний.

Частный и практически значимый случай НМЛ – логика с исключениями. В статье представлен подход к реализации логики с исключениями методом ФГ, основанный на ранее развитом подходе к реализации нечетких логик и ЛЛМ методом ФГ [6–8].

### Подход к задаче

В работах [6–8] рассмотрение реализации нечетких логик проводилось на простом жизненном примере, относящемся к категории логического вывода “Обобщенный Modus Ponens”:

*если <яблоко большое и красное>, то <оно хорошее>*,

*то <яблоко очень большое и очень красное>, следовательно, <яблоко отличное>.*

Это правило связывает значения лингвистических переменных, определенных на разных лингвистических шкалах: две входные лингвистические переменные “размер яблока” и “цвет яблока” связаны с выходной лингвистической переменной “качество яблока”, которая может рассматриваться также и как интегральная оценка. Правило логического вывода “Обобщенный Modus Ponens” может быть формализовано в общем случае в виде

*если <P (посылка)>, то <C (заключение)>.*

Продукционное правило логики с исключениями может быть представлено как развитие правила “Обобщенный Modus Ponens” [6–8], а именно

*если <P (посылка)>, то <C (заключение)>, если не <E (исключение)>.* (1)

Это правило можно проиллюстрировать уже приведенным примером, который и будет использован в дальнейшем изложении:

*если <яблоко большое и красное>, то <оно хорошее>, если не <перекормлено химическими удобрениями>.*

Нетрудно видеть, что добавление новой информации о возможности наличия нитратов существенно изменяет значение вывода. Пока этой информации не было, логика была монотонная – возрастанию значения входных переменных соответствовало

возрастание значения заключения – чем яблоко краснее, тем оно лучше, чем оно больше, тем оно лучше. Но новая информация об опасности нитратов заставляет пересмотреть истинность этой логической конструкции – большое и красное яблоко вызывает подозрение о наличии в нем излишнего количества нитратов, что снижает итоговую оценку.

В зависимости от конкретных условий исключение может либо игнорироваться как неактуальное, либо актуализироваться. В первом случае правило вывода редуцируется к классическому правилу “Modus Ponens” или “Обобщенный Modus Ponens” в нечетких логиках. Введем параметр, описывающий актуальность исключения  $t \in [0, 1]$ . Тогда правило (1) переписывается в виде

*если <P>, то <C>, если не <tE>.* (2)

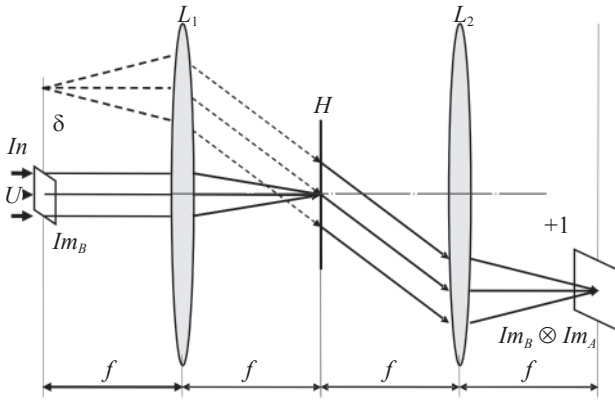
В рамках примера при покупке яблок для того, чтобы их съесть,  $t = 1$ , но для составления натюрморта наличие нитратов несущественно, т. е.  $t = 0$ . В этой связи представляет интерес трансформация оператора *если не* в *даже если*, актуальная в случае покупки яблок для натюрморта.

В четких логиках могут быть истинными либо заключение  $C$ , либо исключение  $E$ , третьего не дано (правило исключенного третьего). В этом случае отношение между  $C$  и  $E$ , заданное посредством оператора *если не*, может быть формализовано, например, в виде

$$(C \wedge \neg E) \vee (E \wedge \neg C), \quad (3)$$

где  $\neg$  – оператор дополнения,  $\wedge$  и  $\vee$  – операторы конъюнкции и дизъюнкции соответственно. Нечеткие логики позволяют ввести более гибкое отношение заключения  $C$  и исключения  $E$ , адекватное реальным условиям. Эта гибкость достигается за счет использования для агрегирования информации  $t$ -норм (обобщенной конъюнкции) и  $t$ -конорм (обобщенной дизъюнкции), обеспечивающих большую свободу в выборе способа формализации оператора *если не*. Использование  $t$ -норм и  $t$ -конорм особо существенно в случае, если заключение и исключение определены (как в рассматриваемом примере) на разных предметных шкалах [14].

В случае формализации логики, реализуемой конкретной физической схемой (в нашем случае – схемой ФГ), выбор этих операторов должен быть обусловлен и физически. Напомним, что (как показано в работах [6–8]) 4- $f$  схема ФГ (рис. 1) строит алгебру логики  $\langle U, F, T, S, M \rangle$ , где  $U$  – универсум, в качестве которого выступает плоский волновой фронт, ограниченный апертурой кадрового окна;  $F$  – оператор фурье-преобразования, задающий фурье-дуальность  $t$ -норм  $T$  и  $t$ -конорм  $S$  (операторов конъюнкции и дизъюнкции) в форме



**Рис. 1.** Схема фурье-голографии с плоским опорным пучком.  $U$  – плоский волновой фронт, освещающий входную плоскость  $In$  (плоскость изображений),  $\delta$  – точечный источник, формирующий опорную волну;  $L_1, L_2$  – фурье-преобразующие линзы с фокусными расстояниями  $f$ ;  $+1$  – плоскость формирования отклика голограммы в  $+1$  порядке дифракции (корреляционная плоскость),  $H$  – фурье-голограмма эталонного изображения  $Im_A$ ,  $Im_B$  – объектное изображение, восстанавливающее голограмму.

$$\forall a, b \in U, S(a, b) = F(T(F(a), F(b))). \quad (4)$$

В оптике  $t$ -норма есть умножение, реализуемое при освещении транспаранта  $Im_A$  плоским волновым фронтом. Оператор фурье-преобразования в соответствии с (4) определяет в качестве  $t$ -конормы (фурье-дуальной  $t$ -норме) свертку, которая реализуется в  $-1$ -м порядке дифракции схемы рис. 1,

$$S(Im_A, Im_B)_F = F(F(Im_B)\eta(F(Im_A))), \quad (5)$$

где  $\eta$  – оператор голографической регистрирующей среды, на которой записана фурье-голограмма операнда  $Im_A$ ;  $Im_B$  – операнд, восстанавливающий голограмму. При трактовке  $t$ -конормы (обобщенной дизъюнкции) как абстрактного сложения  $\oplus$ , в  $+1$ -м порядке дифракции реализуется вычитание  $\ominus$  (абстрактное), определяемое как сложение с аддитивно противоположным элементом

$$(Im_B \ominus Im_A) = F(F(Im_B)\eta(F^*(Im_A))), \quad (6)$$

где астериск обозначает комплексное сопряжение. Аддитивный ноль в данной алгебре есть  $\delta$ -функция, описывающая в приближении фурье-оптики дифракционно-ограниченный точечный источник, формирующий плоскую опорную волну  $R = F(\delta)$ .

Оператор импликации, реализуемый в  $+1$ -м порядке дифракции схемы рис. 1, был определен как

$$M_{+1}(B \rightarrow C) = (Im_B \ominus Im_A) = F(F(Im_B)\eta(F^*(Im_A))). \quad (7)$$

Таким образом, как следует из (7), обработка изображений в схеме ФГ рис. 1 может быть описана как реализация логического вывода “Обобщенный Modus Ponens”, что и было экспериментально продемонстрировано в работах [6–8]. Отметим, что этот вывод согласуется с результатами работ [15–17], в которых показано, что любое измерение как в классических, так и квантовых системах представляет собой вывод “Обобщенный Modus Ponens”.

Для перехода от реализации монотонной логики к логике с исключениями необходимо определить возможность физической реализации оператора *если не*. Сама процедура добавления новой информации в систему проблемы не представляет – задача решается дообучением, т. е. записью мультиплексной голограммы с неизменным положением опорного пучка.

Нетрудно видеть, что простая замена в выражении для оператора (3) операций  $\neg, \wedge$  и  $\vee$  операциями  $F$  (или операцией отрицания  $N$ ), умножения и  $\Theta$  соответственно хотя и физически реализуема в схеме рис. 1, но ведет к излишнему усложнению схемы. Реализация других логических операторов, могущих быть использованными в качестве оператора *если не*, хотя и возможна, но также ведет к чрезмерному усложнению схемы. Поэтому представляется целесообразным искать решение в рамках подхода, основанного на использовании одного оператора. Это возможно, если для оператора исключения принять шкалу с инверсной (по отношению к шкале посылки) зависимостью изменения значения логического заключения от значения исключения.

Рассмотрим эту возможность подробнее. Если для шкалы посылки в [7, 8] была принята возрастающая зависимость значения заключения от значения входной переменной (чем яблоко краснее, тем выше его оценка), то для шкалы исключения значение заключения должно убывать по мере возрастания значения входной переменной, представляющей исключение, – чем больше нитратов, тем яблоко хуже. Тогда интегральная оценка как результат обработки посылки и исключения может быть представлена в виде

$$M_{+1}(B \rightarrow C) = (Im_{BP} \ominus Im_{AP}) + (Im_{BE} \ominus Im_{AE}),$$

где нижние индексы  $P$  и  $E$  относятся к значениям посылки и исключения соответственно. Поскольку в качестве процедуры дефаззификации (преобразования нечеткого значения логического заключения в “четкое”, пригодное для подачи управляющего воздействия на исполнительные органы)  $DF$  в [7, 8] выбрана процедура измерения  $\alpha$ -среза (ширины сечения глобального максимума автокорреляционной функции по заданному уровню), то по-

лучаем нелинейную зависимость заключения от значений  $P$  и  $E$

$$DF[M_{+1}(B \rightarrow C)] = \text{Cогг}_\alpha[(Im_{BP} \Theta Im_{AP}) + (Im_{BE} \Theta Im_{AE})]. \quad (8)$$

### Моделирование и обсуждение

Работа на шкале с инверсной зависимостью заключения от значения исключения сопряжена с тем, что

1) диапазон возможных значений  $(Im_{BE} \Theta Im_{AE})$  ограничен  $[(Im_{BE} \Theta Im_{AE}), \delta]$ , т. е. существенно уже диапазона  $[(Im_{BP} \Theta Im_{AP}), U]$ ;

2) работа в диапазоне значений, меньших значения отклика от эталона, использованного при записи голограммы, связана с существенным падением отношения сигнал/помеха по мере смещения значения отклика от  $(Im_{BE} \Theta Im_{AE})$  к  $\delta$  [18].

Поэтому для определения оптимальных диапазонов изменения параметров, входящих в (8), было проведено численное моделирование изменения интегрального отклика в зависимости от отношения удельных весов посылки и исключения для двух вариантов записи голограммы. Моделировался обсуждаемый в статье пример

*если* <яблоко большое и красное>, *то* <оно хорошее>, *если не* <перекормлено химическими удобрениями>,

связывающий значения посылки  $P$  “цвет яблока” и исключения  $E$  “опасность наличия нитратов” с интегральной оценкой “качество яблока” для различных значений параметра важности исключения  $t$ . Рассматривался случай записи мультиплексной голограммы – правило “Обобщенный Modus Ponens”, описывающее монотонную логику, формировалось при записи голограммы, как это и было реализовано в [6–8], а новая информация, формирующая исключение, вводилась записью наложенной голо-

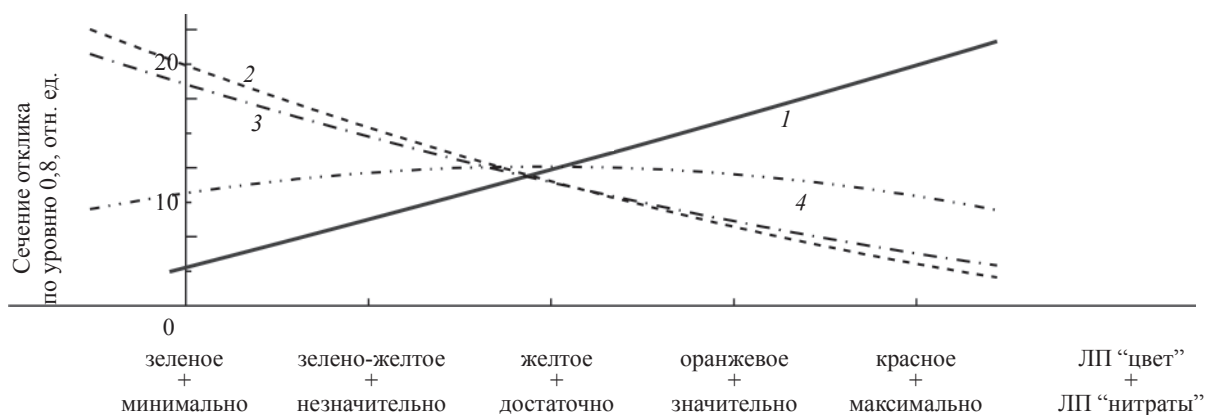
Значения посылки и исключения в рассматриваемом примере

Значение лингвистических переменных		Значение индекса размытия $Im$
Цвет яблока	Опасность нитратов	
Зеленое	Минимальная	0,1
Зелено-желтое	Незначительная	0,2
Желтое	Достаточная	0,5
Оранжевое	Значительная	0,7
Красное	Максимальная	1

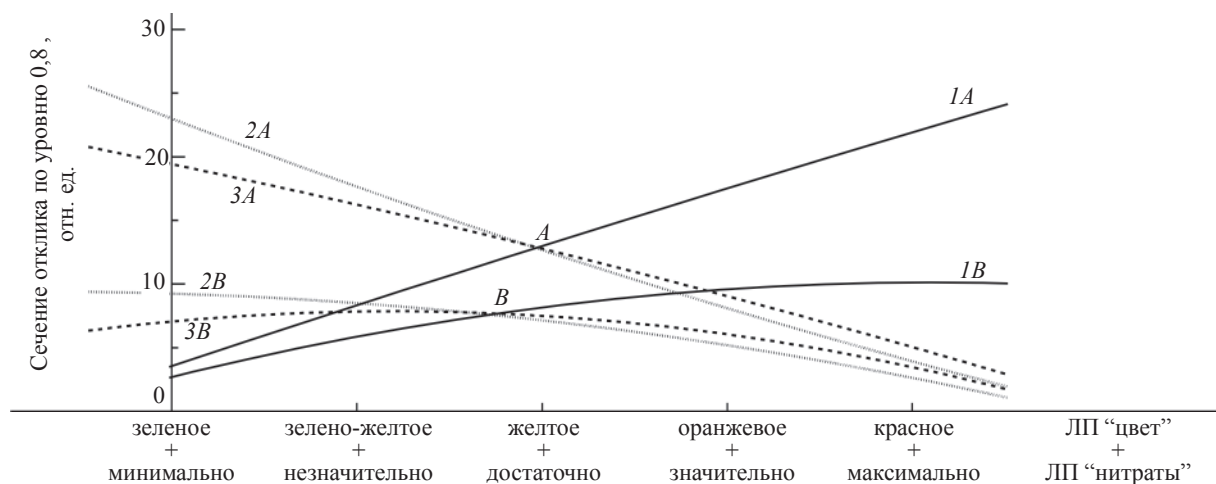
граммы с тем же положением опорного пучка. Значения посылки и исключения приведены в таблице.

На рис. 2 приведено семейство градуировочных кривых, связывающих метрическую шкалу моделируемого устройства ИИ (значения ширин сечения отклика по выбранному уровню) с лингвистическими шкалами, на которых отмечены значения посылки и исключения для трех значений параметра важности исключения  $t$ , наглядно иллюстрирующее перестройку логики в зависимости от важности исключения. Приведенные результаты демонстрируют поведение, характерное для обычной человеческой логики – знание об опасности нитратов вкупе с информацией об их отсутствии в данном образце существенно повышает оценку не только красных, но и зеленых яблок, ранее казавшихся непривлекательными. При информации о наличии нитратов, наоборот, ищется компромисс между разумом (знание об опасности) и желаниями (эстетическая привлекательность красных яблок) – лучшими оказываются желтые яблоки.

На рис. 3 приведены градуировочные кривые для  $t = 0,9$  и разных передаточных функций голограммы, иллюстрирующие в совокупности с кривыми, приведенными на рис. 2, реализацию принципа



**Рис. 2.** Градуировочные кривые логик с исключением при различных значениях важности исключения. 1 – логика без исключения, 2 – исключение, 3 – логика с исключением  $A$  ( $t = 0,9$ ) и  $B$  ( $t = 0,5$ ). (ЛП – лингвистическая переменная).



**Рис. 3.** Семейства градуировочных кривых при  $t = 0,9$ .  $A$  – голограмма с фильтрацией низких частот,  $B$  – с фильтрацией низких и средних частот.  $1A$ ,  $1B$  – логика без исключения;  $2A$ ,  $2B$  – исключение;  $3A$ ,  $3B$  – логика с исключением.

субъективности мышления – при одинаковых значениях посылки и исключения разные голограммы формируют разные логики. В обычной жизни этот феномен встречается постоянно – два человека обучаются одним и тем же правилам на одних и тех же примерах, но каждый из них формирует свою собственную логику. В данном случае голограмма  $A$  отличается высокой разборчивостью, логика ее оценки близка к бинарной, т. е. существенно меняется в зависимости от наличия или отсутствия нитратов – голограмма  $A$  “предпочитает” либо красные, либо зеленые яблоки. Напротив, голограмма  $B$ , обученная тем же примером, демонстрирует стремление к компромиссу (кривая  $3B$  – “логика компромисса” – выбор желто-зеленых яблок).

### Заключение

Таким образом, метод фурье-голографии позволяет реализовать логику с исключениями как частный случай немонотонной логики. Ввод в систему новой информации, изменяющей истинность ранее сформированного вывода, осуществляется посредством записи наложенной голограммы. В реализуемой модели используется один физически обусловленный оператор импликации как для посылки, так и для исключения при работе на шкалах посылки и исключения с инверсными зависимостями значения логического заключения от значений посылки и исключения соответственно. Применение нечеткой логики позволяет повысить гибкость логического вывода. Параметризуемость реализуемой логики оператором голографической регистрирующей среды и оператором дефазсификации обеспечивает ре-

ализацию принципа субъективности мышления и позволяет настраивать логику “под задачу” или “под пользователя”.

Авторы считают приятным долгом выразить благодарность проф. О.П. Кузнецову и проф. И.Б. Фоминых за дискуссии, способствовавшие постановке данной работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Прибрам К. Нелокальность и локализация: голографическая гипотеза о функционировании мозга в процессе восприятия и памяти // Синергетика и психология. В. 1. Методологические вопросы. Изд. М.: МГСУ “Союз”, 1997.
2. Судаков К.В. Голографический принцип системной организации процессов жизнедеятельности // Успехи физиологических наук. 1997. V. 28. С. 3–32.
3. Кузнецов О.П. Неклассические парадигмы в искусственном интеллекте // Изв. АН. Сер. Теория и системы управления. 1995. № 5. С. 3–23.
4. Levesque H. All I Know: a study of autoepistemic logic // Artificial Intelligence. 1990. V. 42. P. 263–309.
5. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений // Математика. Новое в зарубежной науке. 1976. В. 3.
6. Павлов А.В. Применение методов фурье-голографии для построения логических процессоров // Оптический журнал. 2002. Т. 69. № 10. С. 42–48.
7. Павлов А.В., Шевченко Я.Ю. Реализация логического вывода на лингвистических шкалах методом фурье-голографии // Оптический журнал. 2004. Т. 71. № 7. С. 44–51.

8. *Алексеев А.М., Константинов А.М., Павлов А.В.* Использование метода фурье-голографии для моделирования принципа образности мышления // *Оптический журнал*. 2006. Т. 73. № 9. С. 77–82.
  9. *Antoniou G.* Nonmonotonic reasoning. Cambridge, MA: MIT Press, 1997. 285 p.
  10. *Benferhat S., Dubois D., Prade H.* Nonmonotonic reasoning, conditional objects and possibility theory // *Artificial Intelligence*. 1997. V. 92. № 1–2. P. 259–276.
  11. *Lukasiewicz T.* Weak nonmonotonic probabilistic logics // *Artificial Intelligence*. 2005. V. 168. № 1–2. P. 119–161.
  12. Eleventh International Workshop on Non-Monotonic Reasoning // <http://www.cs.ucl.ac.uk/staff/a.hunter/nmr/>
  13. *Виньков М.М., Фоминых И.Б.* Немонотонные рассуждения в динамических интеллектуальных системах // *Новости искусственного интеллекта*. 2005. № 4. С. 12–23.
  14. *Астанин С.В., Калашикова Т.Г.* Модель немонотонных рассуждений на основе нечеткой логики // *Известия ТРТУ (Таганрог). Материалы Междунар. НТК “Интеллектуальные САПР”*. 2000. № 2. С. 81–84.
  15. *Ishikawa Shiro.* Fuzzy Inferences by Algebraic Method // *Fuzzy Sets and Systems*. 1997. V. 87. P. 181–200.
  16. *Ishikawa Shiro.* A Quantum Mechanical Approach to a Fuzzy Theory // *Fuzzy Sets and Systems*. 1997. V. 90. P. 277–306.
  17. *Ishikawa Shiro.* Fuzzy logic in measurements // *Fuzzy Sets and Systems*. 1999. V. 100. № 1–3. P. 291–300.
  18. *Кулешов А.М., Смаева С.А., Шубников Е.И.* Об оптимальности голографического согласованного фильтра // *Опт. и спектр*. 1986. Т. 60. № 3. С. 1273–1276.
-